Олимпиада «Ломоносов» 2024/25

Инженерные науки

6-8 класс 1

9-10 классы 4

11 класс 9

6-8 классы

Задача 1.

Двоечник Петя хвастается, что может разогнаться на велосипеде до $\boldsymbol{V}$ м/мин. Его одноклассники ему не верят, и правильно – Петя перепутал единицы измерения и считает, что в одном метре – 60 см, а в одной минуте – 100 с. С какой настоящей скоростью ездит Петя на велосипеде? Ответ укажите в км/ч.

Требования к ответу

Ответ выразите в км/ч и представьте в виде числа, округлив до десятых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Исходя из Петиной системы пересчета единиц измерения, его скорость V м/мин составляет $\frac{v*60}{100}$ см/с, что в переводе на м/мин составит $0.6v * \frac{60}{100} = 0.36v$ м/мин.
2. Пересчитаем в км/ч: $V = 0.36V * \frac{60}{1000} = 0.0216V$

Критерии:
1. Правильно перевёл скорость в корректные единицы измерения – 15 баллов;
2. Правильно перевёл скорость в км/ч – 10 баллов.
   Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2.

Туристический теплоход проходит от Казани до Самары за ***n*** суток, а в обратном направлении – *7* суток. Как долго будет плыть плот из Казани в Самару?

Требования к ответу

Ответ выразите в сутках и представьте в виде числа, округляя до целых всегда в большую сторону, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Обозначим, что плоту потребуется пройти Х суток, тогда за одни сутки он будет проходить $\frac{1}{X}$ пути.

2. Теплоход проходит по течению реки Волги от Казани до Самары за сутки $\frac{1}{Y}$ части пути, а в обратном направлении, против течения - $\frac{1}{7}$ части пути.
3. Составим уравнение: $\frac{1}{n} - \frac{1}{X} = \frac{1}{7} + \frac{1}{X}$, отсюда X $= \frac{n*7*2}{7-n}$=14n/7-n

Критерии:
1. Правильно составлена система уравнений и/или выведено общее – 15 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты и приведен ответ – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3.

7-классник Ваня заболел и отправился к врачу, который выписал ему сироп «Неболеин». В инструкции к сиропу написано следующее:

Принимать по 2 раза в день, по 5 мг/кг веса в течение 7 дней. Концентрация действующего вещества в сиропе составляет 25 мг/мл. Ваня весит *m* кг. Какой объем сиропа ему необходимо купить?

Возможное решение:

Формула: $V=x*y*z*m/C$

X – сколько вещества на кг веса нужно
Y – количество раз в день
z – количество дней
m – масса Вани
C – концентрация вещества в сиропе

Ответ: m_1=40 V_1=112мл,
m_2=45кг V_2=126мл,
m_3=50кг V_3=140мл,
m_4=55 V_4=154мл,
m_5=60 кг V_5 =168 мл.

Критерии:
1. Правильно получена формула объема сиропа, необходимого Ване по рекомендации врача или приведены пошаговые рассуждения для расчета объема лекарства – 15 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты и приведен ответ – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4. Калориметр со льдом и водой.

В калориметр с нагревателем постоянной мощности поместили $m_в$ кг воды и 0,4 кг льда, взятых при температуре 0°С. После того, как включили нагреватель, лёд полностью растаял через 2 минуты. Пренебрегая теплоёмкостью калориметра и нагревателя, найдите, через какое время вода в калориметре нагреется на 20°С? Ответ запишите в секундах. *Справочные данные*: Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·°С). Удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг.

Для получения наивысшего балла за решение задачи допускается отклонение от правильного значения t±5.

Возможное решение:

Количество теплоты, переданное системе, пока в калориметре происходило плавление льда:

$$P\tau_1 = \lambda m_л, \qquad (1)$$

где P – мощность нагревателя калориметра, τ_1 = 2 мин = 120 с, $m_л$ = 0,4 кг (масса льда).

После того, как весь лёд растаял, для нагревания воды на 20°С, системе было передано количество теплоты:

$$P\tau_2 = c_в(m_в + m_л)\cdot\Delta T, \qquad (2)$$

где τ_2 – время нагрева воды на 20°С, $m_л$ = 0,4 кг, $m_в$ = 1,6 кг, ΔT = 20°С.

Разделив (1) на (2), получим следующее выражение:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\lambda m_л}{c_в(m_в + m_л)\cdot\Delta T}, \qquad (3)$$

Из которого найдём время τ_2:

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \frac{c_в(m_в + m_л)\cdot\Delta T}{\lambda m_л}$$

Подставляя численные данные, получаем окончательный ответ:

Окончательная формула с вариативными переменными:

$\tau_2 = 75*(m_в + 0{,}4)$

Ответ: Для $m_в$ = 1,6 кг и $m_л$ = 0,4 кг:

$$\tau_2 = 120\cdot\frac{4200\cdot(1{,}6+0{,}4)\cdot 20}{336\cdot 10^3\cdot 0{,}4} = 150\,\text{с}$$

Критерии.

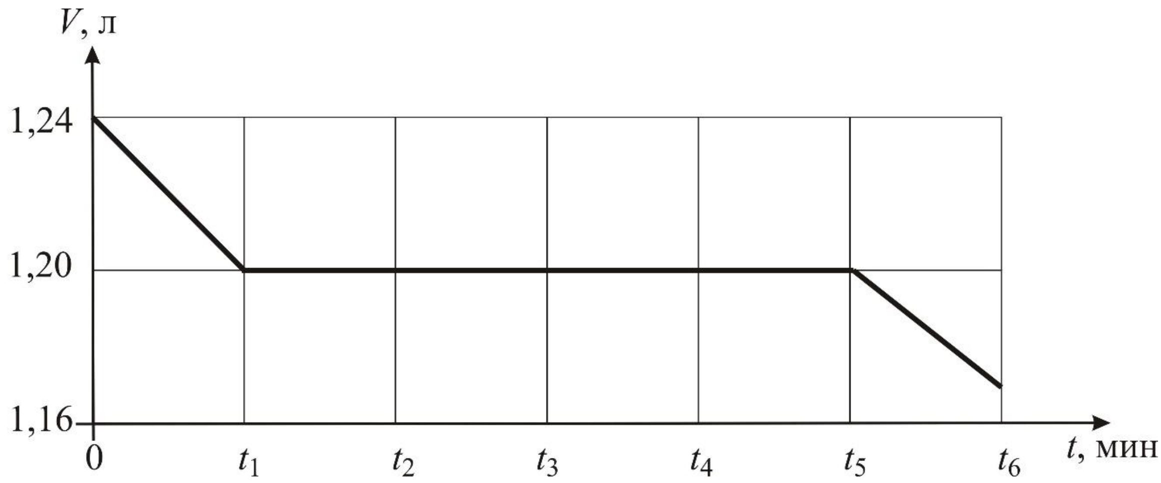
1) Запись выражения (1) для количества теплоты, переданного системе при плавлении льда – 10 баллов.
2) Запись выражения (2) для количества теплоты, переданного системе при нагревании воды на 20°С – 10 баллов.
3) Решение системы уравнений (1)-(2) и нахождение τ_2 – 5 баллов.

Итого: 25 баллов

9-10 классы

Задача 1. Эксперимент по определению удельной теплоты плавления льда.

Для того, чтобы определить удельную теплоту плавления льда, ученик поместил некоторое количество льда в кастрюлю, в дно которой был встроен электронагреватель. Боковые стенки кастрюли сделаны из термостекла, на которую нанесены мерные деления, отмечающие объём. Далее ученик налил в кастрюлю холодную воду и с помощью специальной мелкоячеистой сеточки закрепил лёд так, чтобы тот полностью оказался под водой и не мог всплыть. Первоначальная температура воды и льда была t_0 =0°C. Затем ученик, накрыв кастрюлю крышкой, включил электронагреватель и стал наблюдать за объёмом занимаемым водой со льдом. Результаты своих наблюдений ученик отметил на графике, на котором отобразил зависимость уровня воды в кастрюле от времени (см. рисунок). цена деления $\Delta t = 2 + X$. **Какое значение удельной теплоты плавления льда получил ученик?** Электронагреватель за всё время наблюдений работал с постоянной мощностью. Теплоёмкостью кастрюли и электронагревателя, а также потерями теплоты в окружающее пространство пренебречь.



Справочные данные: Удельная теплоёмкость воды c = 4200 Дж/(кг·°C); плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3; плотность льда $\rho_л$ = 900 кг/м^3. Атмосферное давление в комнате 10^5 Па.

Требования к ответу:

Ответ выразите в кДж/кг и представьте в виде числа, округляя до целых без указания единиц измерения.

Дано:
V_1 = 1,24 л
V_2 = 1,20 л
t_1
t_2
c = 4200 Дж/(кг·°C)
$\rho_в$ = 1000 кг/м^3
$\rho_л$ = 900 кг/м^3

λ – ?

Возможное решение:

Очевидно, что первоначальное понижение уровня воды в кастрюле в первые t_1 минут связано с тем, что при плавлении куска льда тот превращается в воду, объём которой меньше объёма, вытесняемого льдом, по условиям эксперимента целиком погружённого в воду.

$V_1 = V'_{\text{в}} + V_{\text{л}}$, где $V'_{\text{в}}$ – первоначальный объём воды в кастрюле, $V_{\text{л}}$ – объём льда.
После плавления льда:

$V_2 = V'_{\text{в}} + V_{\text{в}}$, где $V_{\text{в}} = \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} V_{\text{л}}$.

Из первых двух соотношений выразим разность $V_1 - V_2$:

$$V_1 - V_2 = (V'_{\text{в}} + V_{\text{л}}) - (V'_{\text{в}} + V_{\text{в}}) = V_{\text{л}} - V_{\text{в}} = V_{\text{л}}\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \qquad (1)$$

Количество теплоты, переданное системе, пока в кастрюле происходило плавление льда:

$$Pt_1 = \lambda m_{\text{л}} = \lambda \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = \frac{\lambda \rho_{\text{л}}(V_1 - V_2)}{\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right)}, \qquad (2)$$

После того, как весь лёд растаял, объём воды перестал меняться. Он оставался неизменным, пока в кастрюле происходило нагревание воды, до момента времени t_5, когда в системе началось кипение, и вода стала испаряться, а её объём в кастрюле снова начал уменьшаться. Значит, можно утверждать, что за промежуток времени $t_5 - t_1$ вода нагрелась на $\Delta T = 100°\text{C}$.

Количество теплоты, переданное системе, пока в кастрюле происходило нагревание воды на $\Delta T = 100°\text{C}$:

$$P(t_5 - t_1) = c\rho_{\text{в}} V_2 \Delta T \qquad (3)$$

Разделив (2) на (3), получим соотношение:

$$\frac{t_1}{t_5 - t_1} = \frac{\lambda \rho_{\text{л}}(V_1 - V_2)}{\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) c\rho_{\text{в}} V_2 \Delta T} = \frac{\lambda \rho_{\text{л}}(V_1 - V_2)}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \cdot c V_2 \Delta T} \qquad (4)$$

Из получившегося соотношения (4) выразим величину удельной теплоты плавления λ льда:

$$\lambda = \frac{t_1}{(t_5 - t_1)} \cdot \frac{c V_2 (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \cdot \Delta T}{\rho_{\text{л}} \cdot (V_1 - V_2)} \qquad (5)$$

Подставляя численные данные, получим:

$$\lambda = \frac{t_1}{(t_5 - t_1)} \cdot \frac{4200 \cdot 1{,}20 \cdot (1000 - 900) \cdot 100}{900 \cdot (1{,}24 - 1{,}20)} = 350000(\text{Дж/кг}) = 350(\text{кДж/кг})$$

Окончательная формула:

λ = (t1/(t5-t1))*1400000

λ= 1400000*((2 + X)/((2 + X)*4))} – здесь (2 + X) сокращается, поэтому окончательная формула: λ = 1400000/4.

Ответ: λ = 350 кДж/кг

Критерии:

1) Нахождение по графику времени плавления льда (t_1) и времени нагревания воды на 100°С ($t_5 - t_1$) – 2 балла.
2) Нахождение связи между объёмом льда и объёмом образовавшейся из этого льда воды – 3 балла.
3) Нахождение связи между изменением объёма воды в кастрюле ($V_1 - V_2$) и объёмом льда $V_л$, запись выражения (1) – 5 баллов.
4) Запись выражения (2) для количества теплоты, переданного системе при плавлении льда – 5 баллов.
5) Запись выражения (3) для количества теплоты, переданного системе при нагревании воды на 100°С – 5 баллов.
6) Решение системы уравнений (2)-(3) и нахождение λ – 5 баллов.

Итого: 25 баллов

Задача 2. Аккумулятор мобильного телефона.

Ёмкость аккумуляторов мобильных телефонов (смартфонов) часто измеряют в миллиампер-часах (мА·ч). Эта величина показывает, сколько бы часов проработал аккумулятор, если бы через него протекал ток в 1 мА.

Для сравнения работы двух разных аккумуляторов взяли два мобильных телефона: у первого мобильного телефона ёмкость аккумулятора равна q_1 = 5000 мА·ч, а у второго q_2 = 3500 мА·ч.

Первый телефон после зарядки проработал t ч, после чего разрядился. Напряжение на этом аккумуляторе во время работы было почти постоянно и равно U = 3,6 В.

1) Найдите среднюю мощность, используемую первым мобильным телефоном за время t. Полученную величину запишите в ваттах, округлив её до сотых.

Аккумулятор второго мобильного телефона работал до своей полной разрядки при том же постоянном напряжении U, что и первый телефон, но при этом средняя мощность, используемая вторым телефоном, была в 2 раза ниже, чем у первого телефона.

2) Найдите, сколько времени t_2 проработал второй мобильный телефон до полной разрядки своего аккумулятора. Полученную величину запишите в часах, округлив её до десятых.

Решение.

1) Работа электрического тока, протекающего в аккумуляторе мобильного телефона $A = I \cdot U \cdot t = q \cdot U$

Средняя мощность, используемая первым телефоном за время t_1: $P_1 = \frac{A_1}{t_1} = \frac{q_1 U}{t_1}$

$$P_1 = \frac{q_1 \cdot U}{t_1} = \frac{q_1 \cdot 3{,}6}{t_1} \text{ (Вт)}$$

Окончательная формула:

1) $P_1 = 18/t_1$

2) Средняя мощность, используемая вторым телефоном за время t_2:

$$P_2 = \frac{q_2 \cdot U}{t_2} = \frac{P_1}{2};$$

Отсюда:

$$t_2 = \frac{q_2 \cdot U}{P_2} = \frac{2q_2 \cdot U}{P_1} = \frac{2q_2}{q_1} t_1 = 105 \text{ (ч)}$$

Окончательная формула:

2) $t_2 = 1{,}4 * t_1$

Ответ:

1) $P_1 = 18/t_1$

2) $t_2 = 1{,}4 * t_1$

Критерии.

7) Запись работы электрического тока, протекающего через аккумулятор – 5 баллов.
8) Нахождение средней мощности, используемой первым мобильным телефоном за время t_1 – 10 баллов.
9) Нахождение времени работы аккумулятора второго мобильного телефона – 10 баллов.

<u>Итого</u>: **25 баллов**

Задача 3. Кузнечик.

На горизонтальной поверхности на боку лежит бочка правильной цилиндрической формы радиуса R. Рядом с бочкой сидит кузнечик. С какой наименьшей скоростью u кузнечик должен подпрыгнуть, чтобы при перепрыгивании бочки он коснулся в полёте её верхней точки? Траектория кузнечика и дно бочки лежат в одной вертикальной плоскости.

Справочные данные: ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

<u>Требования к ответу</u>

Ответ выразите в м/с и представьте в виде числа, округляя до сотых долей, без указания единиц измерения.

Возможное решение:

В системе отсчёта, связанной с землёй, запишем уравнение сохранения энергии кузнечика в момент прыжка и в тот момент, когда он касается верхней точки бочки:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mgR, \qquad (1)$$

где u – скорость кузнечика в момент прыжка с земли, v – скорость кузнечика в верхней точке бочки, R – радиус бочки, m – масса кузнечика.

В верхней точке бочки скорость v кузнечика направлена строго горизонтально, при этом верхняя точка окружности бочки совпадает с вершиной параболы, по которой движется кузнечик. Радиус кривизны параболы в верхней точке при наименьшей скорости прыжка должен быть равен радиусу окружности – тогда окружность ещё вписывается в параболу. Условием этого является то, что в верхней точке параболы ускорение кузнечика есть нормальное (центростремительное) ускорение при движении по окружности, и оно равно g:

$$\frac{v^2}{R} = g \qquad (2)$$

Сокращая в (1) массу m и подставляя выражение (2) в (1), получаем:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{gR}{2} + 2gR, \qquad (3)$$

откуда

$$u = \sqrt{5gR} \qquad (4)$$

Окончательная формула:

$u = \sqrt{5*10*R}$

Ответ:

1) при R = 0,2: u = 3,16

Критерии:

1. Правильно записано уравнение сохранения механической энергии – 10 баллов.
2. Указано, что в верхней точке параболы центростремительное ускорение кузнечика при движении по окружности равно g – 5 баллов.
3. Получена правильная окончательная формула (4) – 5 баллов.
4. Приведён правильный ответ – 5 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4. Разделение катионов.

Предложите метод разделения катионов меди (II), бария (II), магния (II) и натрия (I) из раствора, содержащего их нитраты. Рассчитайте какое количество каждого из металлов (в виде простых веществ) можно получить из 1 кг исходного раствора, если массовая доля нитратов меди (II), железа (III), никеля (II) и натрия (I) составляет 5, 7, 12 и 9 % соответственно.

Возможное решение 1 (для меди (II), бария (II), магния (II) и натрия (I)**):**

1. Добавить NaOH

В осадок выпадут $Cu(OH)_2$ и $Mg(OH)_2$, таким образом они фильтрованием отделятся от $NaOH$ и $Ba(OH)_2$.
2. К смеси $NaOH$ и $Ba(OH)_2$ добавить сначала азотную кислоту для перевода их обратно в нитраты, а затем разбавленной серной кислоты, таким образом $BaSO_4$ выпадет в осадок.
3. К смеси $Cu(OH)_2$ и $Mg(OH)_2$ добавить сначала азотную кислоту для перевода их обратно в нитраты, а затем плавиковой кислоты, либо любого растворимого фторида для осаждения MgF_2.
А также любые другие разумные варианты
4. Формула для расчета: *m(металла) = (w*1кг)/M(нитрата)*M(металла)*
w – массовая доля
Ответ:
Меди – 16.9 г (0.267 моль)
Бария – 36.7 г (0.268 моль)
Магния – 19.5 г (0.811 моль)
Натрия – 24.4 г (1.059 моль)

Возможное решение 2 (для нитратов меди (II), железа (III), никеля (II) и натрия (I):
1. Добавить раствор аммиака, в осадок выпадет $Fe(OH)_3$.
2. Добавить диметилглиоксим для осаждения катиона Ni
3. Добавить NaOH, в осадок выпадет $Cu(OH)_2$
А также любые другие разумные варианты
Формула для расчета: *m(металла) = (w*1кг)/M(нитрата)*M(металла), где* w – массовая доля.

Ответ:
Меди – 16.9 г (0.267 моль)
Железа – 16.3 г (0.290 моль))
Никеля – 38.8 г (0.657 моль)
Натрия – 24.4 г (1.059 моль)
Критерии:

1) Правильно определен порядок разделения – 15 баллов.
2) Правильно составлена формула для расчета – 5 баллов.
3) Правильно сделаны расчеты – 5 баллов.

11 класс
Задача 1. Жаропонижающее.

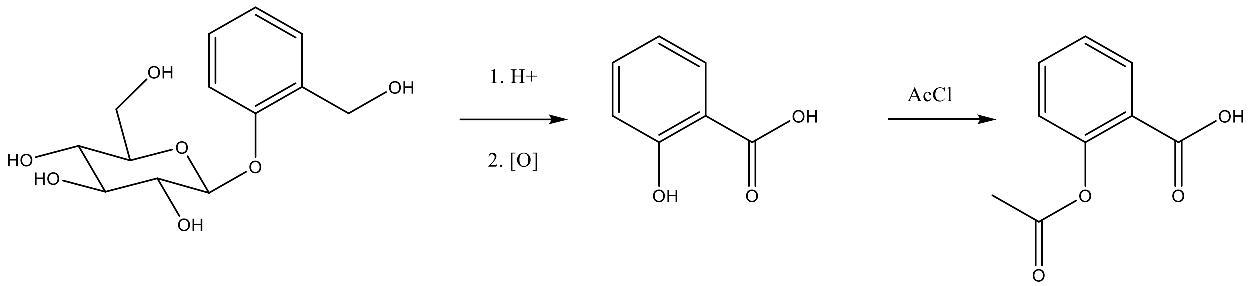
В древности в качестве жаропонижающего средства использовался экстракт коры ивы, содержащий простой эфир глюкозы. Из данного эфира в две стадии – кислотный гидролиз на воздухе и ацилирование может быть получен очень известный препарат, который также обладает жаропонижающим действием, но при этом значительно более эффективен, чем исходное сырье.

Назовите данный препарат и напишите упомянутые химические реакции, а также рассчитайте сколько его можно получить из 1 кг сухой коры ивы, если содержание в ней исходного эфира составляет от 0.2 до 1.5 %, а выходы реакций – 60-85% на первой стадии и 95% на второй стадии.

Возможное решение:

Препарат – ацетилсалициловая кислота (аспирин)

Исходное вещество в коре ивы – салицин
Реакции получения аспирина из салицина:



Расчет:

*m (аспирина) = m(коры)*ω*γ₁*γ₂*M(аспирина)/ M(салицина)*

ω – массовая доля салицина в коре

γ – выход реакции

Ответ: от 0.72 г до 7.6 г

Критерии:

1) Написана формула аспирина – 3 балла.
2) Написана формула салицина – 5 баллов.
3) Описаны реакции – 10 баллов.
4) Составлена формула для расчета – 5 баллов.
5) Получен правильный ответ – 2 балла.

Итого: 25 баллов

Задача 2. Электролиз.

При полном электролизе расплава некоторого вещества в инертной атмосфере в течение T часов и токе ($10/T$) А образовалось 4,3 г некоторого металла. (Данный процесс исторически был использован для производства этого металла в индустрии и имеет своё название).

Определить: 1) какой металл был произведён;

2) какое вещество было подвергнуто электролизу и какие при этом происходили процессы.

Справочные данные: постоянная Фарадея F = 96500 Кл/моль.

Возможное решение.

Согласно закону Фарадея масса M вещества, выделившегося на каждом из электродов пропорциональна силе тока I и времени T (выраженном в секундах) прохождения тока через расплав электролита:

$$M = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{n} \cdot I \cdot T, \qquad (1)$$

где μ – молярная (или атомная) масса вещества, n – валентность атома (или группы атомов), из которого образовался ион, F – постоянная Фарадея. Таким образом, из (1) можно найти отношение μ/n:

$$\frac{\mu}{n} = \frac{M \cdot F}{I \cdot T} \qquad (2)$$

Подставляя численные данные, получаем, что отношение

$$\frac{\mu}{n} = 11{,}5 \text{ г/моль.} \qquad (3)$$

Пользуясь таблицей Д.И. Менделеева, попробуем путём перебора n установить металл, образовавшийся на электроде:

а) если $n = 1$, то $\mu = 11{,}5$ г/моль. Такого металла не существует.

б) если $n = 2$, то $\mu = 23$ г/моль. Такой металл существует, это **натрий Na**. Однако натрий – это щелочной металл, который имеет валентность, равную единице.

Попытаемся устранить получившееся противоречие. Противоречия можно избежать, если принять, что $n = 1$, однако выход конечного продукта (металла) по току составляет лишь половину от возможного. Такой метод получения металлического натрия называется процесс Кастнера. Кастнер предложил этот способ получения натрия в 1890 году из **расплава безводного гидроксида натрия NaOH**. Расплавленный едкий натр образует только ионы Na^+ и OH^-.

На электродах протекают следующие электрохимические реакции:

На катоде образуется металлический натрий:

$$4Na^+ + 4e^- \rightarrow 4Na \qquad (4)$$

На аноде образуется вода и кислород:

$$4OH^- - 4e^- \rightarrow 2H_2O + O_2 \uparrow \qquad (5)$$

То есть на 4 атома натрия образуется 2 молекулы воды.

Вода, образующаяся у анода, диффундирует в околокатодное пространство и вступает в реакцию с металлическим натрием согласно реакции:

$$2H_2O + 2Na \rightarrow 2NaOH + H_2\uparrow \qquad (6)$$

Если вся вода, образующаяся в анодном пространстве, прореагирует с натрием, то выход металла на катоде составит только 50%.

Таким образом, в уравнение (1) вместо M нужно подставить $2M$ (поскольку изначально металла было в 2 раза больше). В таком случае:

$$\frac{\mu}{n} = \frac{(2M) \cdot F}{I \cdot T} \qquad (7)$$

$$\frac{\mu}{n} \approx 23 \text{ г/моль, где } n = 1.$$

Пример. $T = 10$ ч = 36000 с; $I = 10/T = 1$ А; $M = 4{,}3$ г
10 часов = 36000 секунд

$$\frac{\mu}{n} = \frac{(2\cdot 4{,}3\cdot 10^{-3})\cdot 96500}{1\cdot 36000} \approx 23\cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}$$

Окончательная формула с вариативными переменными:
MU_n = (2*96,5*4,3)/(3600*T*10/T) = 0,023

Ответ: 1) металл натрий (Na);

2) электролизу было подвергнуто вещество NaOH

Ответ:
1) при $T = 2{,}5$ч; $I = 4$ А: $MU\_n = 0{,}023$ кг/моль; Na; NaOH

Критерии.
1) Запись уравнения Фарадея (1) – 3 балла.
2) Получение результата (2) – 1 балл.
3) Установление факта (возможно, и без объяснения (п.6)), что на катоде образовался натрий Na, – 5 баллов.
4) Правильный ответ на второй вопрос (какое вещество подвергали электролизу – NaOH) – 5 баллов.
5) Запись электрохимических реакций (4)-(5) и химической реакции (6) – 6 баллов.
6) Вывод о том, что в результате электролиза на катоде оседает лишь половина от всей массы металла, запись уравнения (7) – 5 баллов.

<u>Итого</u>: 25 баллов

Задача 3. Аттракцион

Горизонтальная подставка с грузом совершает гармонические колебания по вертикали в поле тяжести $g = 10$ м/с^2 с амплитудой A= 5 см. При какой частоте колебаний силы давления груза на подставку в крайних точках отличаются в n раз? Ответ записать с точностью до сотых долей.
Справочные материалы.
Принять $\pi \approx 3{,}14$.
Возможное решение:
Закон движения по вертикали имеет вид:

$$z = A\sin\omega t$$

Отсюда ускорения в верхней и нижней точках:

$$a_{\text{в}} = -A\omega^2, a_{\text{н}} = A\omega^2$$

Второй закон Ньютона для верхней и нижней точек имеет вид:

$$ma_{\text{в}} = N_{\text{в}} - mg = -mA\omega^2, \qquad ma_{\text{н}} = N_{\text{н}} - mg = mA\omega^2$$

$$n = \frac{N_{\text{н}}}{N_{\text{в}}} = \frac{g + A\omega^2}{g - A\omega^2}; \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}; \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\cdot\frac{n-1}{n+1}} = 1{,}84 \text{ Гц}$$

Ответ: при $n = 5$: $\nu = 1{,}84$ Гц

Критерии:
1. Правильно записан второй закон Ньютона для движения груза на подставке для верхней и нижней точек — 8 баллов.

2. Записан закон периодического движения (временная зависимость координаты— 7 баллов.

3. Записаны силы реакции в верхней и нижней точках—5 баллов.

4. Получена правильная окончательная формула для ν – 5 баллов

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4 (Заряд в магнитном поле).

Точечный заряд Q = 1 нКл помещён в постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$, величина которого равна B = 1 Тл. Точечный заряд q = 1 нКл, имеющий массу $m = 10^{-8}$ кг, вращается по окружности, в центре которой находится заряд Q. Чему равен наибольший период обращения заряда q, если известно, что радиус окружности, по которой он вращается, равен R? Траектория заряда лежит в плоскости, содержащей Q и перпендикулярной $\vec{B}$. Ответ выразите в секундах и округлите до целого числа.

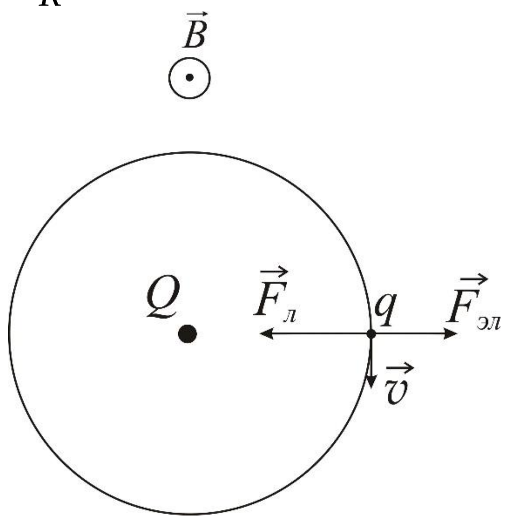
Справочные данные: постоянная в законе Кулона: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 4\cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

Возможное решение:

Запишем второй закон Ньютона в проекции на нормаль, считая , что магнитное поле направлено к зрителю из-за плоскости рисунка, а заряд q – вращается по часовой стрелке со скоростью v (см. рисунок):

$$ma_ц = F_л - F_{эл}, \text{ где}$$

$$a_ц = \frac{v^2}{R},\ F_л = Bqv,\ F_{эл} = \frac{kQq}{R^2}.$$



Подставляя $a_ц$, $F_л$ и $F_{эл}$, получаем:

$$\frac{mv^2}{R} = Bqv - \frac{kqQ}{R^2}$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно v, находим:

$$v = \frac{v_B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 - v_E^2}$$

где $v_B = \frac{BqR}{m}$, $v_E = \sqrt{\frac{kqQ}{mR}}$.

Скорость движения постоянна по величине, так как касательные проекции сил отсутствуют. Таким образом, для периода получаем:

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{4\pi m}{Bq} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQm}{qB^2R^3}}}$

Анализ данного соотношения показывает, что в случае отталкивания между зарядами (*Q>0*) по круговой орбите заданного радиуса возможно движение с двумя значениями скорости, стремящимися друг к другу при его уменьшении. Однако, если при этом $R < \sqrt[3]{\frac{4kQm}{qB^2}}$ то равновесное движение по такой орбите невозможно, так как магнитная сила не сможет скомпенсировать кулоновское отталкивание.

Для заданных параметров задачи (Q, q, m, B) величина радиуса $R > \sqrt[3]{\frac{4kQm}{qB^2}}$.

Поэтому заряд q движется равновесно и его наибольший период обращения равен:

$$T_{\max} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{4\pi m}{Bq} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4kQm}{qB^2R^3}}}$$

Ответ:
1) $R = 10$ м, $T_{\max} = 628$ с.

Критерии:

1. Записан второй закон Ньютона для движения заряда— 6 баллов.
2. Сделан рисунок с указанием возможного направления электромагнитных сил— 3 балла.
3. Получено решение квадратного уравнения для скорости, сделан вывод о существовании двух равновесных орбит и записана формула для периода —7 баллов.
4. Проведен анализ дискриминанта уравнения и проверка, что радиус из условия удовлетворяет корректному решению задачи – 6 баллов.
5. Получено правильное численное значение максимального периода – 3 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**