

Функциональные непрерывные дроби в гиперэллиптических полях

Научный руководитель – Чубариков Владимир Николаевич

Федоров Глеб Владимирович

Сотрудник

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математических и компьютерных
методов анализа, Москва, Россия
E-mail: glebonyat@mail.ru

Пусть $F(X)$ многочлен четной степени над полем K . Вопрос о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F(X)}$, построенной в поле формальных степенных рядов $K((1/X))$, связан с многими математическими проблемами. Одной из первых таких проблем стала проблема интегрируемости в элементарных функциях псевдоэллиптических интегралов, рассмотренная в классических работах Абеля и Чебышева.

Современные результаты о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F(X)}$ и эквивалентных условиях изложены в [1], [4]. В частности, из этих результатов следует, что разложение в непрерывную дробь элемента $\sqrt{F(X)}$ играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц гиперэллиптического поля $L = K(X)(\sqrt{F(X)})$ и с поиском рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $Y^2 = F(X)$.

Теория функциональных непрерывных дробей стала мощным арифметическим инструментом для исследования этих проблем. Кроме этого, возникающие в теории функциональных непрерывных дробей задачи имеют собственный интерес. Иногда эти задачи имеют аналоги в числовом случае, но особенно интересны задачи, которые значительно отличаются от числового случая. Одной из таких задач является задача об оценке сверху длин периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической – периодической с точностью до ненулевой постоянной из поля констант K . Для непрерывной дроби элемента $\sqrt{F(X)}$ справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В 2019 году в статье [2] В.П. Платоновым и автором для гиперэллиптических полей L , заданных многочленом F четной степени над полем рациональных чисел, найден точный промежуток целых значений s таких, что непрерывные дроби элементов вида $X^s \sqrt{F(X)}$ периодические. Используя этот результат в статье [3] автором доказаны точные оценки сверху на длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел, зависящие только от рода гиперэллиптического поля и порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой.

Источники и литература

- 1) Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.
- 2) Платонов В.П., Федоров Г.В. Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чеб. сб. 2019. Т. 20, №1. С. 246-258.

- 3) Федоров Г.В. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чеб. сб. 2019. Т. 20, №4. С. 321-334.
- 4) Adams W.W., Razar M.J. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41, №3. P. 481-498.