Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О свойствах решетки ω-веерных формаций конечных групп

Научный руководитель – Сорокина Марина Михайловна

Максаков Серафим Павлович

Аспирант

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: msp222@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп представляет собой такую совокупность групп, которая с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. Одним из важнейших видов классов конечных групп являются формации, т.е. классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Для изучения формаций широко используются методы теории решеток (см., например, [3]). Целью исследования является изучение решеточных свойств ω-веерных формаций конечных групп, введенных в рассмотрение В.А. Ведерниковым в 1999 году [2].

Используемые обозначения и определения для групп и классов групп стандартны (см. [3]). Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $\mathfrak{E}_\omega$ — класс всех ω-групп, т.е. таких групп G, что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G. Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называется ωF-функцией (здесь символ ω' обозначает элемент, не принадлежащий ω); функция $\delta : \mathbb{P} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ называется $\mathbb{P}FR$-функцией. Формация $\mathfrak{F} = (G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-веерной формацией с направлением δ (коротко, $\omega\delta$-веерной формацией) и с ω-спутником f, обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$. Направление δ называется bp-направлением, если δ — b-направление, т.е. $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; и δ — p-направление, т.е. $\mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Через δ_0 обозначается направление ω-полной формации, т.е. $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; δ_1 — направление ω-локальной формации, т.е. $\delta_1(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; δ_3 — направление ω-центральной формации, т.е. $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [2]. Решеткой называется частично упорядоченное множество Θ, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge_\Theta y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee_\Theta y$ [1]. Пусть Θ — непустое множество формаций, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — Θ-формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$). Точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяют соответственно следующим образом: $\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 = \Theta form(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ — Θ-формация, порожденная множеством $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ [3]. Совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности Θ-формаций является Θ-формацией и существует $\mathfrak{M} \in \Theta$ такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ для любой формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ [3]. Через $\Theta_{\omega\delta}$ обозначим множество всех $\omega\delta$-веерных формаций.

Теорема 1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда множество $\Theta_{\omega\delta}$ является полной решеткой формаций.*

Следуя [3], полную решетку формаций Θ назовем $\omega\delta$-индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним Θ-значным ω-спутником, и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место равенство: $\vee_{\Theta_{\omega\delta}}{}_{i\in I}(\mathfrak{F}_i) = \omega F(\vee_{\Theta_{i\in I}} f_i, \delta)$. Через $\Theta_\mathfrak{E}$ обозначим совокупность всех формаций конечных групп. Отметим, что $\Theta_\mathfrak{E}$ является полной решеткой формаций.

Теорема 2. *Пусть δ — bp-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда $\Theta_{\mathfrak{E}}$ является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.*

Следуя [1], решетку формаций Θ называют модулярной, если для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \in \Theta$ таких, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, справедливо:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta (\mathfrak{F}_2 \vee_\Theta \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_\Theta (\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_3) \text{ [3].}$$

Теорема 3. *Пусть δ — bp-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда $\Theta_{\omega\delta}$ является модулярной решеткой формаций.*

Пусть $\mathfrak{F}_2/_\Theta\mathfrak{F}_1 = \{\mathfrak{H} \in \Theta \mid \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2\ \}$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Следствие 1. *Пусть δ — bp-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta_{\omega\delta}$ решетки $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\Theta_{\omega\delta}} \mathfrak{F}_2)/_{\Theta_{\omega\delta}}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\Theta_{\omega\delta}}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Theta_{\omega\delta}} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Источники и литература

1) Биркгоф Г. Теория решеток. Наука, Москва, 1984.
2) Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
3) Скиба А. Н. Алгебра формаций. Беларуская навука, Минск, 1997.