Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Полуасимптотика в игре гладиаторов

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

Харламов Виктор Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: xarik1999@gmail.com

В нашей работе мы рассмотрим модель «состязания гладиаторов». Два игрока обладают командами гладиаторов численностью m и n, соответственно. Каждый гладиатор характеризуется неотрицательным параметром сила. Гладиаторы с нулевой силой исключаются из рассмотрения. Пусть у первой команды вектор сил $a = (a_1, \ldots, a_m)$, у второй команды $b = (b_1, \ldots, b_n)$. На первом шаге команды выбирают по одному гладиатору и ставят сражаться. Вероятность победы гладиатора прямо пропорциональна его силе, то есть гладиатор с силой a_i выиграет гладиатора с силой b_j с вероятностью

$$\frac{a_i}{a_i + b_j}.$$

Победивший гладиатор возвращается в состав команды (и обладает той же силой), сохраняя неизменной силу, а проигравший погибает (то есть его сила становится равной нулю). На втором шаге команды вновь выставляют по одному гладиатору (возможно победившая команда вновь выставляет предыдущего). Игра заканчивается, когда в какой-то команде суммарная сила гладиаторов стала нулевой. Модель была введена Каминским, Луксом и Нелсоном [1]. Они же вывели вероятность победы каждой команды при фиксированных векторах сил команд и объяснили независимость вероятности победы от стратегии. Ринотт, Скарсини и Ю [2] рассмотрели случай, когда в данной модели фиксированы суммарные силы и численности каждой команды. Они описали равновесия Нэша данной игры: более сильной команде необходимо делить силы равномерно по всем гладиаторам, а слабой необходимо равномерно делить силы по какому-то подмножеству гладиаторов. Однако, в работе не было получено явное описание стратегии слабой команды. Для произвольного соотношения сил мы рассмотрели последовательность игр, где в n-й игре каждая команда состоит из n гладиаторов, и описали оптимальные стратегии для больших n.

Теорема 1. *Существует такая монотонно убывающая последовательность $c^*(k)$, $k \geq 1$, что при $k \to \infty$ $c^*(k)$ стремится к 1, а $c^*(1) < 2$. Для удобства $c^*(0)$ полагается равным $+\infty$. Тогда луч $(1, +\infty)$ представляется как дизъюнктное объединение непустых полуинтервалов $[c^*(k), c^*(k-1))$. При c из интервала $(c^*(k), c^*(k-1))$ второму игроку оптимальнее всего будет делить силу равномерно между как можно большим количеством гладиаторов, а первому – равномерно между k гладиаторами. Если $c = c^*(k)$, то для первого игрока одинаково выгодно делить силу равномерно между k или $k+1$ гладиаторами.*

Параметры $c^*(k)$ в теореме 1 задаются следующими соотношениями

Теорема 2. *Положим*

$$p_k(c) := \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k > ck) = \mathbf{P}(\widetilde{X}_k > c) = e^{-ck} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(ck)^l}{l!},$$

где $X_1, \ldots, X_k$ *– независимые одинаково распределённые* exp(1), $\widetilde{X}_k = \sum_{i=1}^{k} X_i/k$. *Число* $c = c^*(k)$ *является единственным решением* $p_{k+1}(c) = p_k(c)$, *или*

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{(c(k+1))^l}{l!} = e^c \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(ck)^l}{l!}.$$

Это уравнение эквивалентно интегральному

$$G_k(c) := c \int_0^1 \left(1 + \frac{y}{k}\right)^k e^{-cy} dy = 1.$$

Для больших k имеем следующую асимптотику.

Теорема 3. *При* $k \to \infty$ *верна эквивалентность*

$$c^*(k) = 1 + \frac{1}{3k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

Полученный нами результат дополняет работу Диакониса и Перлмана [3] о пересечении функций распределения гамма-распределенных случайных величин.

Теорема 4. *Пусть для натурального* l *функция* F_l *является функцией распределения случайной величины* $Gamma(l, 1)$. *Обозначим через* $c^*(s, t)$ *единственную положительную точку пересечения* F_t *и* F_s. *Тогда при натуральных* $m < k < n$ *верно*

$$c^*(m, k) > c^*(m, n) > c^*(k, n).$$

Источники и литература

1) Kaminsky K. S., Luks E. M., Nelson P. I. Strategy, nontransitive dominance and the exponential distribution //Australian Journal of Statistics. – 1984. – Т. 26. – №. 2. – С. 111-118.
2) Rinott Y., Scarsini M., Yu Y. A Colonel Blotto gladiator game //Mathematics of Operations Research. – 2012. – Т. 37. – №. 4. – С. 574-590.
3) Diaconis P., Perlman M. D. Bounds for tail probabilities of weighted sums of independent gamma random variables //Lecture Notes-Monograph Series. – 1990. – С. 147-166.