Секция «Геометрия и топология»

Топологический анализ биллиарда в поле потенциала четвертой степени.

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Пустовойтов Сергей Евгеньевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Математическим биллиардом называется динамическая система, описывающая движение материальной точки внутри связной, компактной, замкнутой области с кусочно-гладкой границей. При попадании точки на границу ее вектор скорости меняется согласно естественному закону отражения. Рассмотрим биллиард внутри эллипса на плоскости, где на точку действует потенциальная сила с потенциалом V. Такая система является гамильтоновой с гамильтонианом $H = T + V$– полной энергией. Гамильтониан является первым интегралом системы.

Определение 1. *Если у гамильтоновой динамической системы есть два первых интеграла f и g, для которых верно, что они функционально независимы и находятся в инволюции, то такая система называется вполне интегрируемой по Лиувиллю.*

Вопросом о том, интегрируем ли рассматриваемый биллиард, занимался В.И.Драгович в своих работах [2] и [3] . В них автор приводит широкий класс потенциалов, для которых выполнена интегрируемость. В частности, можно выделить подкласс полиномиальных потенциалов P_{2n}, в котором $P_2 = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ – хорошо известный гуковский потенциал, для которого топологический анализ был проведен ранее.

Рассмотрим теперь следующий потенциал

$$P_4 = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2(\alpha - \beta)}{a - b} x^2 y^2 + \frac{\alpha - \beta}{a - b}(x^4 + y^4),$$

где α и β–постоянные коэффициенты. Как было сказано ранее, биллиард с таким потенциалом интегрируем, и его первые интегралы в эллиптических координатах имеют вид

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_2^2 + \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$F = -H\lambda_1 + 2(\alpha + \beta)\lambda_1^2 + \frac{\alpha}{a - b}(b + \lambda_1)^3 - \frac{\beta}{a - b}(a + \lambda_1)^3,$$

где μ_1 и μ_2 – импульсы, соответствующие координатам λ_1 и λ_2, a и b–полуоси эллипса.

Теорема 1. *Для биллиарда в эллипсе с потенциалом P_4 будет сохраняться теорема Лиувилля, а слоения изоэнергетических многообразий $Q^3 = \{H = const\}$ могут быть описаны полными инвариантами Фоменко-Цишанга.*

Так, для каждых значений параметров α и β была построена бифуркационная диаграмма, а для различных значений интеграла H был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга.

Теорема 2. *Бифуркации торов Лиувилля описываются одним из следующих атомов: A, B, C_2, D_2, E_4 и A^**

Источники и литература

1) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.v

2) *V.I.Dragovich* Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No. 1, pp. 159-162, 1998

3) *V.I.Dragovich* The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 2213–2221

4) *Фокичева В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

5) *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.