Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О локальных классах Бэра ляпуновских инвариантов

Научный руководитель – Быков Владимир Владиславович

Равчеев Андрей Валерьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: rav4eev@mail.ru

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями A (отождествляемыми с соответствующими системами).

В теории показателей Ляпунова на множестве $\mathcal{M}^n$ чаще всего рассматриваются две топологии — *равномерная*, задаваемая нормой $\|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t)|,\ A \in \mathcal{M}^n$, и *компактно-открытая,* задаваемая метрикой

$$\rho_C(A, B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 2^{-t}\}, \quad A, B \in \mathcal{M}^n,$$

$$\text{где } |A(t)| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Полученные топологические пространства будем обозначать через $\mathcal{M}^n_U$ и $\mathcal{M}^n_C$ соответственно.

Пусть X — метрическое пространство. Будем говорить [1], что функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ принадлежит k-му ($k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$) классу Бэра *относительно точки* $x_0 \in X$, если существует такая окрестность U точки x_0, что сужение $\varphi : U \to \mathbb{R}$ функции φ на U принадлежит k-му классу Бэра [2, §39.2].

Функционал на $\mathcal{M}^n$, принимающий одинаковые значения на любых *ляпуновски эквивалентных* системах [3, с. 63], будем называть *ляпуновским инвариантом.*

Известно [1], что каждый из показателей Ляпунова в пространстве $\mathcal{M}^n_C$ относительно любой точки принадлежит в точности второму классу Бэра. В то же время в пространстве $\mathcal{M}^n_U$ найдутся точки, относительно которых все показатели Ляпунова принадлежат нулевому классу, а для каждого отдельного показателя найдутся точки, относительно которых он принадлежит в точности второму классу. Кроме того, два младших показателя не могут принадлежать в точности первому классу относительно какой-либо точки (про остальные показатели это неизвестно).

Возникает естественный вопрос: какие классы Бэра может иметь в этих пространствах относительно различных точек произвольный ляпуновский инвариант? Ответ содержится в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует множество систем $\{A_i \in \mathcal{M}^n : i \in \mathbb{N}\}$ и ляпуновский инвариант $\varphi : \mathcal{M}^n_U \to [0, 1]$, имеющий относительно точки A_i в точности i-й класс Бэра.*

Теорема 2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $N \geq 2$ существует множество систем $\{A_i \in \mathcal{M}^n : i = \overline{1, N}\}$ и ляпуновский инвариант $\varphi : \mathcal{M}^n_U \to [0, 1]$, имеющий относительно точки A_i в точности i-й класс Бэра и такой, что на пространстве $\mathcal{M}^n_C$ функционал φ принадлежит в точности N-му классу Бэра.*

Теорема 3. *Пусть $\varphi : \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ — ляпуновский инвариант в точности k-го ($k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$) класса Бэра. Тогда φ имеет в точности тот же класс Бэра относительно любой точки $A \in \mathcal{M}^n$.*

Источники и литература

1) Сергеев И.Н. О локальных классах Бэра показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1577.
2) Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.–Л., 1937.
3) Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб., 1992.