

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

## Оптимальное управление нелинейных динамических систем на основе формализма Лагранжа

Научный руководитель – Баландин Дмитрий Владимирович

*Отман Шериф Абделлillah*

*Аспирант*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*E-mail: abdelillahoch@gmail.com*

Предлагаемый доклад посвящается классической стратегии оптимального управления нелинейных динамических систем, основанной на формализме Лагранжа. Выясняется, что для достижения минимума функционала действия непосредственное использование формализма Лагранжа при наличии дополнительных связей позволяет успешно и безо всяких преобразований исходной системы дифференциальных уравнений движения исследуемых объектов генерировать управляющее воздействие в виде усилий дополнительных связей. то есть как выясняется, решение задачи оптимального управления может вполне успешно проводиться непосредственно по отношению к системе нелинейных дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа с привлечением процедуры линеаризации исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений с последующим применением численных методов решения линеаризованной системы дифференциальных уравнений . Тогда фаза преобразования исходной системы дифференциальных уравнений движения заданных динамических систем оказывается совершенно излишней, что в ряде случаев решения задач на нахождение оптимального управления может существенно загромождать вычислительный процесс.

1. **Уравнения Лагранжа второго рода.** Переходим к рассмотрению случая, когда объектом движения выступает не материальная точка, а материальное тело, подчиненное некоторой дополнительной, предположительно голономной, связи (рис. 3). Вследствие нахождения условного экстремума функционала действия по Остроградскому [4 - 9], уравнением движения рассматриваемого материального тела будет выступать уравнение Лагранжа второго рода при наличии дополнительной голономной связи. Стало быть, будем иметь следующую систему алгебро-дифференциальных уравнений (1.1) .Аналогичным образом образуется система алгебро-дифференциальных уравнений движения системы  $n$  материальных тел, подчиненных  $m$  уравнениям голономных связей [9]. В результате получаем следующую систему алгебро-дифференциальных уравнений (1.2).

2. **Линеаризованная задача динамики в общей постановке.**Связанная система алгебро-дифференциальных уравнений движения (1.2) совокупности из  $n$  материальных тел при наличии  $m$  дополнительных связей голономного типа является системой нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений. Следовательно, образованная система (1.2) не может иметь аналитического решения. А из этого следует, что полученная система уравнений может быть решена только численно.В связи с вышеизложенным представляет особый интерес процедура предварительной линеаризации исходной системы алгебро-дифференциальных уравнений движения (1.2). Так, например, применение схемы численного интегрирования Ньюмарка : (2.1) и (2.2) [10].В случае, когда оба параметра равны 0 система приближений (2.1) - (2.2) вырождается в явную схему численного интегрирования Ньюмарка; в случаях же один из них не равен 0 приближения (2.1) - (2.2) выражают

невную схему численного интегрирования системы нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений. В результате подстановки системы аппроксимаций (2.1) - (2.2) в систему нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений движения (1.2) совокупности материальных тел при наличии голономных дополнительных связей получаем линеаризованную систему алгебро-дифференциальных уравнений движения [10] для каждого фиксированного момента времени  $t$  : (2.3) где (2.4) суть вектор *управляющего усилия*.

**3. Нахождения условного минимума функционала действия упругого следящего манипулятора.** Переходим к численному решению задачи определения условного минимума функционала действия по Остроградскому [10] однозвенного упругого манипулятора, изображенного на (рис.4), единственное подвижное звено которого вращается вокруг оси  $Z$ , проходящей через точку  $A_1$ , с постоянной угловой скоростью:  $w = \text{const}$ . Положим геометрические и физико-механические характеристики упругого звена равными:  $l=1\text{m}$ ;  $d=0.005\text{m}$ ;  $\rho=7800\text{kg/m}^3$ ;  $E=200\text{ГПа}$ . Можно показать, что условный минимум функционала действия по Остроградскому [9] (3.1) где  $L$  - функция Лагранжа и  $W$  - работа неконсервативных сил, система нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы (рис. 3) с учетом того, что  $q_2 = u$ , где  $u$  - упругое перемещение концевой точки  $A_2$  упругого звена, записывается в виде система (3.2) [11, 12]. Теперь требуется специфицировать уравнение дополнительной голономной связи в системе нелинейных уравнений (3.2), которая в явном виде записывается (3.3). И теперь выдвигаем критерий оптимизации движения исполнительного органа следящего манипулятора по окружной траектории (рис. 4).

**Критерий оптимизации.** Отождествление функций положений исполнительного органа  $P$  трехзвенного манипулятора с учетом и без учета упругого отклонения (см. рис. 4) выступает необходимым и достаточным признаком минимизации начального упругого отклонения следящего манипулятора, причем минимизация этого отклонения при отсутствии сил сопротивления подчиняется зависимости, близкой к линейной.

**Доказательство.** Рассмотрим функции отклонений исполнительного органа следящего манипулятора (см. рис. 4) с учетом и без учета начального упругого отклонения (3.4) - (3.5). где  $w$  - угловая скорость вращения упругого звена контура  $A_1, A_2'$  относительно оси вращения, проходящей через точку  $A_1$ ; ( $w = \text{const}$ ). После приравнивания функций отклонений для точек  $P$  и  $P'$  в системах равенств (3.4) и (3.5) образуется уравнение дополнительной связи (3.3). Путем элементарных преобразований устанавливается, что в результате упрощения тригонометрическое уравнение (3.3) приводится к эквивалентному уравнению:  $q_2 = 0$ , или после двукратного дифференцирования, имеем (3.6). и В таком случае система нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений (3.2) приводится к виду (3.7). Следовательно, при ненулевых начальных условиях (например, при положительном начальном отклонении  $u_0$  и отрицательной скорости) упругая следящая система, изображенная на (рис.4) и подчиненная условию (3.6), будет стремиться к обнулению этого отклонения за промежуток времени  $t_k$ . При отсутствии диссипативных сил зависимость строго линейна. Диаграмма минимизации упругого отклонения во времени представлена на (рис.5).

Для нахождения функции управляющего воздействия  $Q$  требуется для каждого фиксированного момента времени  $t$  решение линеаризованной системы алгебро-дифференциальных уравнений движения (3.7) следящего манипулятора, которая в данном случае принимает вид (3.8) [12].

### Источники и литература

- 1) Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: На-

- ука, 1979. – 432 с.
- 2) Афонасьев А.П., Дикуссар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В. Не-обегходимые условия в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1990. – 318 с
  - 3) Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1993. – 392 с.
  - 4) Lagrange J.L. Théorie des fonctions analytiques / L’Imprimerie de la Ré-publique. – Paris, 1797. – 277 pp
  - 5) Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, тт. 1 – 2. – М.: Наука, 1982
  - 6) Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, тт. 1 – 2. – М.: Наука, 1979
  - 7) Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971.
  - 8) Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. О принципе Лаеггранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений / Успехи математических наук. – т. 68, 3 (411), 2013. – С. 5 – 38
  - 9) Goldstein Н. Classical mechanics. – Assison-Wesley, 2002.
  - 10) Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
  - 11) Shabana A.A. Dynamics of multibody systems. – Springer-Verlag Edition, 1988
  - 12) Gofron M. and Shabana A.A. Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems // International Journal of Nonlinear Dynamics. – 1993. – V.4. – P. 183 – 206

### Иллюстрации

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q} = Q + \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \\ \hline f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  – обобщенная координата, скорость и ускорение материального тела,  $Q$  – обобщенная сила, а  $\Gamma$  – функция кинетической энергии

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n; \\ \hline f_j(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_i(t + \Delta t) = \ddot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) \Delta t + [(0.5 - \beta) \ddot{q}_i(t) + \beta \ddot{q}_i(t + \Delta t)] \Delta t^2, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i(t + \Delta t) = \dot{q}_i(t) + [(1.0 - \gamma) \dot{q}_i(t) + \gamma \dot{q}_i(t + \Delta t)] \Delta t, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad t \in [0, T],$$

где  $0 \leq \beta \leq 0.5$  и  $0 \leq \gamma \leq 1$

$$\begin{bmatrix} M_{nn} & M_{nz} \\ M_{nz} & M_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T \quad (2.4)$$

Рис. 1. системы и уравнения 1 и 2

$$\delta S = \int_0^t (\delta L + \delta W) dt = \int_0^t (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_2}, \\ f(q_1, q_2) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$(l \cos q_1 - q_2 \sin q_1)^2 + (l \sin q_1 + q_2 \cos q_1)^2 = R^2, \quad \text{где } R = l. \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x_p = l \cos q_1 - q_2 \sin q_1, \\ y_p = l \sin q_1 + q_2 \cos q_1; \end{cases} \quad u \quad \begin{cases} x_p = R \cos \alpha t, \\ y_p = R \sin \alpha t, \end{cases} \quad (3.4) - (3.5)$$

$$\bar{q}_2 = 0. \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_2}, \\ \bar{q}_2 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Рис. 2. системы и уравнения 3

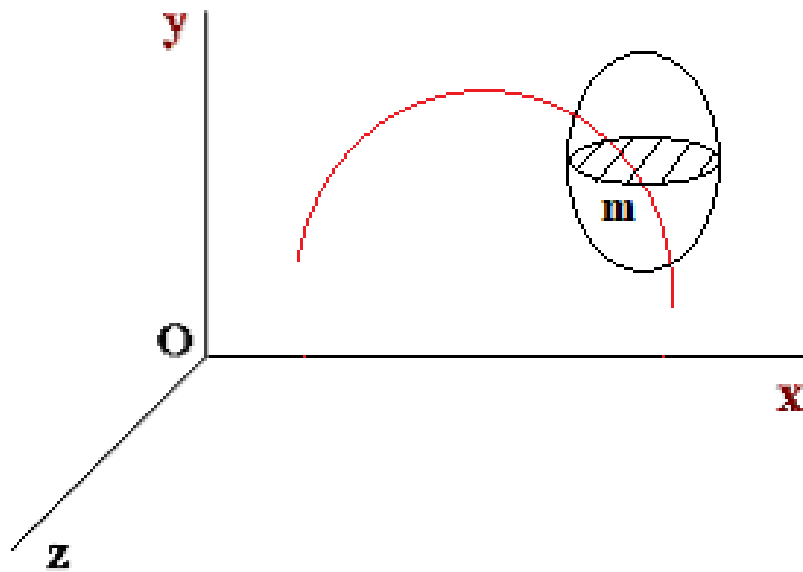


Рис. 3. Схема несвободного движения материального тела

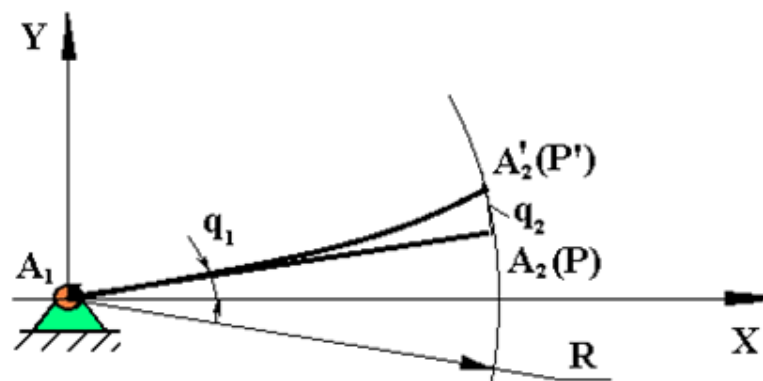


Рис. 4. Схема движения упругой следящей системы

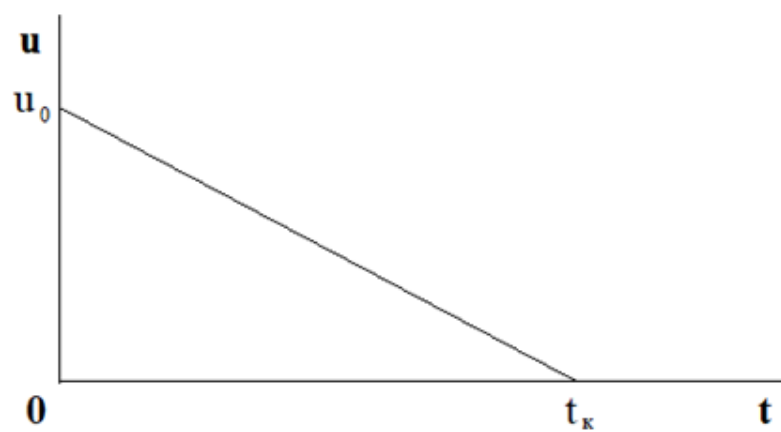


Рис. 5. Диаграмма минимизации начального упругого отклонения