

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО РАНГА ТЕНЗОРОВ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Валиахметов Булат Ильдарович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: valiahmetovbulat@mail.ru

Научный руководитель — Тьртъшников Евгений Евгеньевич

В задачах современной вычислительной математики постоянно возникает необходимость хранить и обрабатывать данные в виде многомерных массивов — тензоров. Для более эффективного использования машинных ресурсов весьма полезным является применение следующих представлений тензоров:

$$T[i_1, i_2, i_3, \dots, i_p] = \sum_{\alpha=1}^r u_1[i_1, \alpha] u_2[i_2, \alpha] \dots u_p[i_p, \alpha]. \quad (1)$$

Наименьшее число слагаемых среди всех таких представлений называется *рангом тензора*. Процесс поиска разложения для произвольного тензора представляет большую сложность в силу сложности задачи поиска хотя бы минимального количества слагаемых в разложении. Из-за неустойчивости ранговой характеристики к малым возмущениям имеет смысл поиск *максимального ранга* для определённых классов тензоров.

В данной работе рассматривается максимальный ранг $3 \times 3 \times 5$ комплексных тензоров, обозначаемый $R(3, 3, 5)$. Из статьи [1] известны значения $R(3, 3, p)$ для всех натуральных p , кроме $p = 5$, для которого есть лишь оценки: $6 \leq R(3, 3, 5) \leq 7$. Доказательство левой части данного неравенства приведено в [2]. В данной работе мы приведём новое доказательство нижней оценки, основанное на тесной связи трёхмерных тензоров с билинейными отображениями и *методе разделяющих подпространств*.

Пусть имеется отображение $\varphi: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$ и его r -членное трилинейное разложение, вытекающее из (1):

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^r f_{\alpha}(x) g_{\alpha}(y) z_{\alpha}, \quad (2)$$

в котором нет нулевых членов, то есть $z_{\alpha} \neq 0$ для всех α и нет тождественно нулевых функционалов f_{α} и g_{α} . Тройка подпространств

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$ называется *разделяющей* для разложения (2), если после перенумерации его слагаемых система функционалов f_1, \dots, f_p полна на \mathcal{U} , система g_{p+1}, \dots, g_{p+q} полна на \mathcal{V} и при этом соответствующие векторы z_1, \dots, z_{p+q} не лежат в \mathcal{W} .

Если r -членное трилинейное разложение разделяется тройкой подпространств $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, то можно доказать следующее неравенство:

$$r \geq \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \nu(\mathcal{W}),$$

где $\nu(\mathcal{W})$ — число индексов α , для которых $z_\alpha \in \mathcal{W}$. Из данного неравенства можно получать нижние оценки рангов конкретных тензоров. Остаётся лишь подбирать разделяющие тройки подпространств достаточно больших размерностей, что также представляет собой нетривиальную задачу.

В данной работе нами построена тройка подпространств

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^3, \mathcal{V} = \mathcal{L}([1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T), \mathcal{W} = \mathcal{L}([0, 1, 0, 0]^T),$$

которая является разделяющей для *любого* трилинейного разложения вида (2), соответствующего тензору T с сечениями: $I_{3 \times 3}, E_{12}, E_{13}, E_{23}, O_{3 \times 3}$. Далее показано, что от любого разложения (2) можно перейти к эквивалентному, в котором $\nu(\mathcal{W}) \geq 1$, откуда получаются требуемая оценка: $R(3, 3, 5) \geq 6$.

Литература

1. Atkinson M. D., Stephens N. M. On the Maximal Multiplicative Complexity of a Family of Bilinear Forms // Linear Algebra and its Applications Volume 27, October 1979, P. 1–8.
2. Sumi T., Miyazaki M., Sakata T. About the maximal rank of 3-tensors over the real and the complex number field // Ann Inst Stat Math 62, 2010, P. 807–822.