Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О некоторых неявно предполных в P_k классах функций, сохраняющих ортогональные разбиения.

Научный руководитель – Касим-Заде Октай Мурадович

Старостин Михаил Васильевич

Сотрудник

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия
E-mail: murmol@bk.ru

Понятие неявной выразимости введено А.В. Кузнецовым в [1] как одно из обобщений понятия выразимости посредством суперпозиций.

Говорят, что функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ *неявно выразима* над системой Σ функций k-значной логики, если существуют такие функции $A_i(x_1,\ldots,x_n,z), B_i(x_1,\ldots,x_n,z)$, $i=1,\ldots,m$, выразимые посредством суперпозиций над множеством $\Sigma\cup\{x\}$, что система уравнений

$$\begin{cases} A_1(x_1,x_2,...,x_n,z) = B_1(x_1,x_2,...,x_n,z),\\ A_2(x_1,x_2,...,x_n,z) = B_2(x_1,x_2,...,x_n,z),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad ...\\ A_m(x_1,x_2,...,x_n,z) = B_m(x_1,x_2,...,x_n,z). \end{cases}$$

эквивалентна уравнению $z=f(x_1,\ldots,x_n)$. Множество всех функций, неявно выразимых над системой функций Σ называется *неявным расширением* Σ. Говорят, что система функций является *неявно полной* в P_k, если ее неявное расширение совпадает с P_k. Система функций Σ называется *неявно предполной*, если она не является неявно полной, но становится такой при добавлении к ней любой функции не из Σ.

Все неявно предполные классы в P_2 и P_3 описаны в работах [2] и [3] соответственно. Кроме того, в работах [4,5] описаны семейства классов, являющихся неявно предполными в P_k при $k\geq 3$.

Пусть на множестве E_k задано разбиение B:

$$E_k = B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_s,$$

где подмножества B_i попарно не пересекаются, и ни одно из них не пусто. Наборы $\tilde\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\tilde\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ называются *эквивалентными* относительно разбиения B, если для любого $1\leq j\leq n$ значения α_j и β_j принадлежат одному и тому же подмножеству B_i. Говорят, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_k$ *сохраняет разбиение* B, если для любых эквивалентных (относительно B) наборов $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ значения $f(\tilde\alpha)$ и $f(\tilde\beta)$ также эквивалентны (относительно B). Класс функций, состоящий из всех функций, сохраняющих разбиение B называется *классом сохранения разбиения* B и обозначается через U_B (подробнее об этом см. [6]). Будем называть пару разбиений B^1, B^2 ортогональными, если для любых $1\leq i\leq s_1$ и $1\leq j\leq s_2$ подмножества B^1_i и B^2_j пересекаются ровно по одному элементу.

Основным результатом настоящей работы является доказательство того, что классы функций, сохраняющих пару ортогональных разбиений неявно полны в P_k.

Источники и литература

1) Кузнецов А.В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. 5–33.

2) Касим-Заде О.М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Докл. РАН. 1996. 348, №3. 299–301.
3) Старостин М.В. Неявно предполные классы и критерий неявной полноты в трехзначной логике // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. №2, с. 56–59.
4) Орехова Е.А. Об одном критерии неявной полноты в k-значной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Физматлит, 2002. 77–90.
5) Старостин М.В. О некоторых неявно предполных классах монотонных функций в P_k // Дискретная математика. 2018. Т. 30, № 4, с. 106-114.
6) Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958.