Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Квадратурные формулы с кратными узлами

Научный руководитель – Григорьев Илья Сергеевич

Гасанова Фатима Расим гызы
Студент (бакалавр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: ftm.hasanova@gmail.com

В работе рассматривается задача построения квадратурных формул с кратными узлами:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) + (b-a)^2 \sum_{i=1}^{n} C_i' f'(x_i) + R_n,$$

где x_i – узлы квадратурной формулы, C_i и C_i' – коэффициенты или веса квадратурной формулы, а R_n – остаток или погрешность. Узлы и коэффициенты определяются из условия точности квадратурных формул для многочленов наиболее высокой степени и минимизации погрешности.

Исследование показало, что оптимизация по всем узлам и коэффициентам ($3n$ неизвестных $x_i,\ C_i,\ C_i',\ i=1,\ldots,n$) приводит к известным квадратурам Гаусса. Обобщение квадратур Маркова ($3n-2$ неизвестных; $x_1=a,\ x_n=b$) приводит к новым квадратурным формулам таким, что $C_i>0$, $C_i'=0$ при $i=2,...,n-1$ (во внутренних узлах) и $C_1'=-C_n'$.

В случае использования составных квадратурных формул с постоянным шагом это приводит к отсутствию необходимости вычислять производные во внутренних точках составной квадратурной формулы.

Дополнительное построение позволяет избавиться от вычисления производных на концах отрезка интегрирования. В результате получается квадратурная формула с числом операций, как у классической составной квадратуры Маркова, и точностью, как у классической составной квадратуры Гаусса.

Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают полученные выводы.