Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Полиномиальные симплектоморфизмы и гипотеза Концевича

Научный руководитель – Канель-Белов Алексей Яковлевич

Елишев Андрей Михайлович

Аспирант

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: elishev@phystech.edu

Пусть A_n – n-ая алгебра Вейля над комплексными числами, то есть факторалгебра свободной ассоциативной алгебры от $2n$ переменных x_i, y_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ по двустороннему идеалу, порожденному многочленами

$$x_ix_j - x_jx_i, \;\; y_iy_j - y_jy_i, \;\; y_ix_j - x_jy_i - \delta_{ij}.$$

Пусть P_n – коммутативная алгебра Пуассона, то есть алгебра многочленов от $2n$ переменных над комплексными числами, снабженная дополнительной бинарной операцией – скобкой Пуассона. Алгебру P_n можно рассматривать как алгебру функций фазового аффинного пространства, несущую дополнительную структуру (ее присутствие, в частности, означает требование симплектичности эндоморфизмов этой алгебры), в то время как алгебра Вейля A_n – результат ее деформационного квантования (после специализации формального параметра - постоянной Планка $\hbar$).

Гипотеза Концевича (Канель-Белов и Концевич, [5]) утверждает, что группы автоморфизмов этих алгебр изоморфны друг другу при любом n:

$$AutA_n \simeq AutP_n.$$

Гипотеза Концевича верна при $n = 1$; это следует из классических результатов (Юнг, [2], Ван дер Калк [8], Макар-Лиманов [6]) о структуре соответствующих групп автоморфизмов. Общий случай оставался открытой проблемой до недавней работы (Додд, [1]) и, независимо, серии работ Канеля-Белова, Елишева и Ю. Доклад посвящен доказательству гипотезы Концевича для $n > 1$, предложенному в статье (Канель-Белов, Елишев, Ю [3]).

Идея доказательства состоит в следующем. В статье (Цучимото, [7]) был построен гомоморфизм групп

$$\Phi : AutA_n \to AutP_n$$

ограничение которого на подгруппы $TAut$ так называемых ручных автоморфизмов дает изоморфизм этих подгрупп. Известно (Канель-Белов и др., [4]), что подгруппа ручных симплектоморфизмов всюду плотна в $AutP_n$ в топологии формальных степенных рядов. Для построения гомоморфизма, обратного к Φ, можно рассмотреть какую-либо последовательность ручных симплектоморфизмов, сходящуюся к данному симплектоморфизму, взять ее прообраз при Φ в $AutA_n$ и рассмотреть ее формальный предел.

Эта естественная идея сталкивается с трудностями – именно, с зависимостью от выбора приближающей последовательности, – связанными с разрывным характером (в формальной топологии) соответствия подъема. Для преодоления данного препятствия вводятся так называемые расширенные (или деформированные) алгебры A_n^h и P_n^h, получающиеся добавлением n центральных переменных h_i, играющих роль постоянной Планка и деформирующих Пуассонову структуру. Отображение подъема, строящееся аналогичным недеформированному случаю, будет непрерывным в окрестности тождественного автоморфизма. Переход к утверждению гипотезы Концевича достигается затем специализацией параметров деформации.

Источники и литература

1) Dodd, C., The p-Cycle of Holonomic D-modules and Auto-Equivalences of the Weyl Algebra // arXiv: 1510.05734, 2015.
2) Jung, H. W. E., Uber ganze birationale Transformationen der Eben // J. Reine Angew. Math., 184, 161-174, 1942.
3) Kanel-Belov, A., Elishev, A., Yu, J.-T., Augmented Polynomial Symplectomorphisms and Quantization // arXiv: 1812.02859, 2018.
4) Kanel-Belov, A., Grigoriev, S., Elishev, A., Yu, J.-T., Zhang, W., Lifting of Polynomial Symplectomorphisms and Deformation Quantization // Comm. in Algebra, 46:9, 3926-3938, 2018.
5) Kanel-Belov, A., Kontsevich, M., Automorphisms of Weyl algebras // Lett. Math. Phys. 74, 181-199, 2005.
6) Makar-Limanov, L., On automorphisms of Weyl algebra // Bull. S. M. F., tome 112, 359-363, 1984.
7) Tsuchimoto, Y., Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures // Osaka J. Math., 42, No. 2, 2005.
8) Van der Kulk, W., On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wisk. 1, 33-41, 1953.