Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О методах оценки снизу константы совместных диофантовых приближений

Научный руководитель – Добровольский Николай Михайлович

Басалов Юрий Александрович
Аспирант
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Факультет математики, физики и информатики, Тула, Россия
E-mail: basalov_yurij@mail.ru

В работе [6] сформулированы основные термины проблемы наилучших совсместных диофантовых приближений, в частности понятие константы наилучших диофантовых приближений C_n. Проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений посвященно множество исследований. Мы остановимся на методах оценки указанной выше константы снизу.

В 1891 году А. Гурвицом [6] с использованием теорию цепных дробей и теорию квадратичных иррациональностей было получено точное значение $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

В 1927 Ф. Фуртвенглер использую теорию алгебраических полей и произведя оценку дис- криминанта произвольного алгебраичского поля [4] получил общую оценку

$$C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|},$$

где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$.

Следующий результат принадлежит Г. Дэвенпорту [3] – он показал, что $C_n = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}}$, где $\Delta\mathbb{F}$ – критический определитель специального звездного тела. На практике не удалось получить его значение, в связи с чем, Дж. В. С. Касселс [1] пришел к оценке

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}},$$

где и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего пареллелипипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры эквивалентной звезному телу Г. Дэвенпорта, а $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел.

Тем самым, задача свелась к оценке $V_{n,s}$. Значения для $n = 2$ были получены Дж. В. С. Касселсом

$$V_{2,0} = 2, \quad V_{2,1} = 1.$$

В случае $n = 3$ Т. Кьюзик [2] получил

$$V_{3,1} = 2, \quad V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2}.$$

Для $n = 4$ С. Красс [5] получил

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9}.$$

В [6] нами были получены следующие оценки

$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}}, \quad V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11}.$$

Источники и литература

1) Cassels J. W. S., Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119-121
2) Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543-556
3) Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186-195
4) Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169-175
5) Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172-176
6) Басалов Ю.А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений. // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388-405.