Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Мажоризации бинарных матриц

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Штейнер Павел Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Доклад основан на результатах совместной работы с А.Э. Гутерманом и Г. Далем

Пусть $M_{m,n}$ — пространство действительных матриц размера $m \times n$ (пишем M_n при $m = n$). Через $M_{m,n}(s,t)$ для некоторых $s, t \in \mathbb{R}$ обозначим все матрицы из $M_{m,n}$, состоящие только из элементов s и t. Столбец матрицы A под номером j обозначим $A^{(j)}$.

Существует множество различных видов мажоризаций матриц. Доклад будет посвящен следующим из них (см. [1], [2], [3]):

Определение 1. Пусть $A, B \in M_{m,n}$

- Матричная мажоризация: $A \preceq^m B$, если существует такая строчно-стохастическая матрица $R \in M_n$, что $A = BR$.
- Двояко-стохастическая мажоризация: $A \preceq^{ds} B$, если существует такая двояко-стохастическая матрица $D \in M_n$, что $A = BD$.

Теорема 1. *Пусть $A, B \in M_{m,n}(s,t)$. Тогда $A \preceq^{ds} B \Leftrightarrow A = BP$ для некоторой перестановочной матрицы P.*

Теорема 2. *Пусть $A, B \in M_{m,n}(s,t)$, где $0 < s < t$. Тогда $A \preceq^m B$ если, и только если выполнены следующие условия:*

1) *Существует такая перестановочная матрица P, что $A^{(j)} \in \{(BP)^{(j)}; (s)e^t; (t)e^t\}$ для любого j.*
2) *Для выбранного P рассмотрим набор индексов J, где $j \in J \Leftrightarrow A^{(j)} \in \{(s)e^t; (t)e^t\}$. Тогда $(BP)^J e^t = A^J e^t = (l)e^t$ для некоторого $l \in \mathbb{R}$.*

Теорема 3. *Пусть $A, B \in M_{m,n}(s,t)$, где $s < 0 < t$. Тогда $A \preceq^m B \Leftrightarrow A \preceq^{ds} B \Leftrightarrow A = BP$ для некоторой перестановочной матрицы P.*

Теорема 4. *Пусть $A, B \in M_{m,n}(0,t)$. Предположим, что $A \preceq^m B$, но $A \not\preceq^{ds} B$. Тогда существует такая строчно-стохастическая R, что $A = BR$, R содержит столбец, состоящий из одних нулей, и сумма элементов в каждом столбце R или равна 0, или не меньше 1,*

Источники и литература

1) G. Dahl. Matrix majorization. Linear Algebra Appl., 1999. No. 288. pp. 53–73.
2) G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for matrix classes. Linear Algebra Appl., 2018. No. 555. pp. 201—221.
3) A.W. Marshall, I.Olkin, B.C. Arnold. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Second Edition. Springer, New York, 2011.