Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Целые точки в некоторых областях

Научный руководитель – Деза Елена Ивановна

Эргешова Ангелина Владимировна
Студент (магистр)
Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
E-mail: orby1996@mail.ru

Одной из классических проблем теории чисел является задача о нахождении числа целых точек в некоторой замкнутой области, т. е. задача нахождения асимптотической формулы для количества точек с целочисленными координатами, принадлежащих данной области.

Напомним, что *целой точкой* в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ называется точка $(a_1, ..., a_n)$ с целыми координатами $(a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z})$.

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то число T таких точек в области, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ равно $\sum\limits_{a<k\leq b} [f(k)]$, откуда мы немедленно получаем [1] формулу $T = \sum\limits_{a<k\leq b} f(k) + \Delta(R)$, где $|\Delta(R)| \leq b - a$.

В данной работе рассмотрены наиболее известные вопросы такого рода: проблема Гаусса о подсчете числа целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ и проблема делителей Дирихле о подсчете числа целых точек (точнее, точек с натуральными координатами) под гиперболой $xy = R$. Для получения соответствующих асимптотических формул проанализирована и использована формула Эйлера-Маклорена: с её помощью улучшены 4 оценки остаточных членов в некоторых задачах поиска целых точек в замкнутой области.

Теорема 1. *Число целых точек в области, ограниченной прямыми $y = ax$, $y = 0$, $x = c$, равно $\frac{ac^2}{2} + O(ac)$.*

Теорема 2. *Число точек в области, ограниченной параболой $y = -ax^2 + b (a > 0, b > 0)$ и прямой $y = 0$, равно $\frac{4}{3} b \sqrt{\frac{b}{a}} + O(b)$.*

Теорема 3. *Число целых точек в области, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, равно $\frac{3\pi}{8} R^2 + O\left(R^{\frac{5}{3}}\right)$.*

Теорема 4. *Число точек с натуральными координатами под локоном Аньези $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ равно $2a^2 \arctan \sqrt{a-1} + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)$.*

Источники и литература

1) Бухштаб А.А.Теория чисел: Учебное пособие.– СПб.: Издательство Лань, 2008.
2) Деза Е.И. Целые точки. Введение в асимптотические методы. – М.: МПГУ, 2006.
3) Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983.