Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Понятие общерекурсивной реализуемости

Научный руководитель – Плиско Валерий Егорович

Коновалов Александр Юрьевич
Выпускник (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: alexandr.konoval@gmail.com

1. Пусть фиксирована вычислимая нумерация всех n-местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots$ для каждого натурального числа n. Рассмотрим соответствующую нумерацию общерекурсивных функций, определив множество индексов

$$\mathsf{I}_n \rightleftharpoons \{e \mid \varphi_e^n \text{ — общерекурсивная функция}\}.$$

Таким образом, если $z \in \mathsf{I}_n$, то φ_z^n — n-местная общерекурсивная функция, и напротив всякая n-местная общерекурсивная функция есть φ_z^n для некоторого $z \in \mathsf{I}_n$. В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функций φ_z^n там, где он может быть восстановлен из контекста.

2. Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов вида $P(v_1, \ldots, v_k)$ и логических констант $\top$, $\bot$ при помощи связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Определим понятие общерекурсивной реализуемости в духе абсолютной реализуемости [n1]. Следуя [n1], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A.

Временно расширим язык логики предикатов константами для всех натуральных чисел. Для каждого натурального числа e, произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ A$ (натуральное число e общерекурсивно реализует формулу A при оценке f):

- неверно $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \bot$, и верно $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \top$;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$, если P — n-местный предикатный символ;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_{n+1}$ и для всех натуральный чисел s, $a_1, \ldots, a_n$, если $s\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\varphi_e(a_1, \ldots, a_n, s)\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \Psi(a_1, \ldots, a_n)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, \Phi \rightleftharpoons e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, (\top \to \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно общерекурсивно реализуемой*, если найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{r}_f^{GR}\ A$ при любой оценке f формулы A.

3. Базисная логика предикатов в виде секвенциального исчисления BQC описана в [n2]. Будем говорить, что в исчислении BQC выводится предикатная формула A, если в BQC выводится секвенция $\top \Rightarrow A$.

Теорема 1. *Всякая замкнутая предикатная формула, выводимая в исчислении* BQC*, является абсолютно общерекурсивно реализуемой.*

Источники и литература

1) Плиско В. Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983. т. 47. № 2. стр. 315—334.

2) Ruitenburg W. Basic predicate calculus // Notre Dame J. Formal Logic. 1998. **39**, N 1. 18–46.