Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

**Достижимые значения длин алгебр и аддитивные цепочки**

**Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич**

***Кудрявцев Дмитрий Константинович***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
*E-mail: kdk97@rambler.ru*

Систематическое изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работ [1, 2], где изучаются свойства длины для ассоциативных, а именно матричных, алгебр. Основные результаты связанные с неассоциативными алгебрами и их длинами, а также методами изучения, будут опубликованы в работе [3]. Свойства длин алгебр оказались тесно связаны с понятием аддитивных цепочек, которые подробно описаны в работе [4].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру с единицей $A$ над полем $\mathbb{F}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов.

*Словом длины* $k$ для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов длины не более $k$.

Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру* $A$, если существует $k$, такое что $L_k(S)$ совпадает с $A$. Самое маленькое такое $k$ называется *длиной* данной системы.

*Длиной алгебры* $A$ называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих $A$.

Последовательность натуральных чисел $1 = a_0, \ldots, a_r$ называется *аддитивной цепочкой*, если $\forall k \in 1, \ldots, n$ $\exists i, j : 0 \le i \le j < k$ и $a_k = a_i + a_j$.

**Утверждение 1.** Для неассоциативной алгебры с единицей $A$ размерности $n$ возможны те и только те значения длины, большие $2^{n-3}$ в которых не более чем две единицы в двоичном разложении.

**Утверждение 2.** Для неассоциативной алгебры с единицей $A$ размерности $n$ значения длины, меньшие $2^{n-k}$ в которых не более k единиц в двоичном разложении возможны.

## Источники и литература

1) Paz, A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear Multilinear Algebra, 1984, Vol.15, pp. 161-170
2) Papacena, C.J. An Upper Bound for the Length of a Finite-Dimensional Algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545
3) Alexander Guterman, Dmitrii Kudryavtsev, Upper bounds for the length of non-associative algebras, arXiv:1902.08389 [math.CO], February 2019
4) Donald Knuth, The Art of Computer Programming, Vol.2, 3rd ed., 1997, pp. 461-481