Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Графы отношений алгебры контроктонионов

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Жилина Светлана Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра. Обозначим $Z^*(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных делителей нуля в $\mathcal{A}$, $Z^{**}(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$.

Графом ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, множество вершин которого — $Z^{**}(\mathcal{A})$, а различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$ ([1]).

Ориентированным графом делителей нуля $\Gamma_Z(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют ориентированный граф, множество вершин которого — $Z^*(\mathcal{A})$, причём различные вершины a и b соединены направленным ребром от a к b, если и только если $ab = 0$ ([4]).

Как показано в [3], алгебра контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$ изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, элементами которой являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3,$$

а умножение задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

причём $\cdot$ и $\times$ — это скалярное и векторное произведения векторов в $\mathbb{R}^3$.

E — единица этой алгебры. Кроме того, для каждого $A \in \hat{\mathbb{O}}$ корректно определены след $tr(A)$, определитель $det(A)$ и сопряжённый элемент $\bar{A}$. Пусть также $D(A) = (tr(A))^2 - 4det(A)$ – дискриминант характеристического многочлена элемента A.

Графы ортогональности и делителей нуля матричных колец активно изучались ранее, в частности, в работах [1] и [2]. В силу очевидного сходства алгебры $\hat{\mathbb{O}}$ с алгеброй вещественных матриц 2×2 $M_2(\mathbb{R})$, представляется интересным изучение графов $\Gamma_O(\hat{\mathbb{O}})$ и $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$. В рамках данной работы были получены следующие теоремы:

Теорема 1. *Компоненты связности $\Gamma_O(\hat{\mathbb{O}})$ имеют один из двух видов:*

(1) полный двудольный граф, долями которого являются $(\mathbb{R} \setminus \{0\})A$ и $(\mathbb{R} \setminus \{0\})\bar{A}$, где $det(A) = 0$, $tr(A) \neq 0$, диаметр такой компоненты связности равен 2;

(2) подграф, множеством вершин которого являются все такие A, что $det(A) = 0$, $tr(A) = 0$. Диаметр этой компоненты связности равен 3.

Теорема 2. $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$ *связен, его диаметр равен 2.*

Доказательство этих теорем опирается на следующую лемму, которая демонстрирует аналогию с вещественной Жордановой нормальной формой элементов алгебры $M_2(\mathbb{R})$:

Лемма 1. *Пусть $A \in \hat{\mathbb{O}} \setminus \mathbb{R}E$. Тогда существует такое $\phi \in Aut_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$, что:*

(1) если $D(A) > 0$, то $\phi(A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} tr(A) + \sqrt{D(A)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & tr(A) - \sqrt{D(A)} \end{pmatrix}$;

(2) если $D(A) < 0$, то $\phi(A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} tr(A) & \sqrt{-D(A)}\mathbf{e}_1 \\ -\sqrt{-D(A)}\mathbf{e}_1 & tr(A) \end{pmatrix}$;

(3) если $D(A) = 0$, то $\phi(A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} tr(A) & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & tr(A) \end{pmatrix}$,

где $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^t \in \mathbb{R}^3$.

Источники и литература

1) *Б.Р. Бахадлы, А.Э. Гутерман, О.В. Маркова,* Графы, определенные ортогональностью, *Зап. научн. сем. ПОМИ,* **428***(2014), 49–80; Переведено в J. Math. Sci. (N. Y.)* ***207****, No. 5 (2015), 698–717.*
2) *I. Bozic and Z. Petrovic, Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings. — Comm. Algebra* ***37****, No. 4 (2009), 1186-1192.*
3) *K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras. — Springer-Verlag New York, 2004.*
4) *S. P. Redmond, The zero-divisor graph of a noncommutative ring. — International Journal of Commutative Rings* ***1****, No. 4 (2002), 203–211.*