Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Выплаты по дивидендам с парижской задержкой перед парижским разорением в стандартной страховой модели с непрерывным временем

Шигида Борис Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: borshigida@gmail.com

Рассматривается случайный процесс, моделирующий капитал страховой компании в момент t:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} C_i, \quad t \geq 0.$$

Здесь $x > 0$ — начальный капитал компании, $c > 0$ — постоянная скорость поступления премий от клиентов, N_t (количество премий, поступивших к моменту t)— стандартный пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Размеры страховых выплат $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметром α. Кроме того, во всех рассмотрениях предполагается условие чистой прибыли $c > \frac{\lambda}{\alpha}$.

Далее, вводится модифицированный процесс Y_t (см. [1]), который учитывает выплату этой страховой компанией дивидендов с парижской задержкой. А именно, когда капитал пробыл не ниже некоторого фиксированного барьера b достаточно долго (не меньше, чем непрерывный промежуток времени длиной h), то держателям акций выплачиваются дивиденды в размере разности текущего капитала и указанного b (тем самым, капитал возвращается на барьер). Чтобы записать одной формулой значение процесса Y_t, положим $g^X_{b,t} = \sup\{s \leq t \mid X_s \leq b\}$ и введём такие моменты остановки:

$$\tau_0^X = \inf\left\{t \geq 0 \;\middle|\; X_t = b\right\}$$

означает первый момент, когда X достиг уровня b;

$$\tau_i^X = \inf\left\{t \geq \tau_{i-1}^X \mid \mathbf{1}_{\left\{X_t > X_{\tau_{i-1}^X}\right\}} \left(t - g^X_{X_{\tau_{i-1}^X},t}\right) \geq h\right\}$$

означает первый момент после τ_{i-1}^X, когда X пробыл выше $X_{\tau_{i-1}^X}$ не менее h времени. Тогда процесс, моделирующий капитал после выплаты дивидендов:

$$Y_t = X_t \mathbf{1}_{\left\{0 \leq t < \tau_0^X\right\}} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(X_t - X_{\tau_i^X} + b\right) \mathbf{1}_{\left\{\tau_i^X \leq t < \tau_{i+1}^X\right\}}.$$

Нас интересует ожидаемая сумма выплаченных дивидендов перед парижским разорением $\{Y_t\}_{t\geq 0}$: оно происходит, когда Y_t находился ниже нуля достаточно долго (не меньше, чем непрерывный промежуток времени длиной d); этот момент можно записать следующим образом (см. [2]):

$$T_d = \inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \mathbf{1}_{\{Y_t < 0\}} \left(t - d_t^Y\right) \geq d\right\}, \quad \text{где } d_t^Y = \sup\left\{s < t \;\middle|\; Y_s \geq 0\right\}.$$

Пусть r — безрисковая процентная ставка, тогда величина выплат по дивидендам до парижского разорения:

$$V(x,b) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-r\tau_i^X} \left(X_{\tau_i^X} - X_{\tau_{i-1}^X} \right) \mathbf{1}_{\left\{\tau_i^X \le T_d\right\}}.$$

Найден явный вид математического ожидания $\mathsf{E}\left[V(x,b)\right]$ и проведён численный анализ этой функции от параметров модели. Показано, что оптимальный барьер b^*, который максимизирует $\mathsf{E}\left[V(x,b)\right]$, не зависит от x. Чтобы визуализировать траектории процесса Y_t и проанализировать отклонение реального значения выплат по дивидендам на данной выборке от ожидаемого, использовались большие выборки псевдослучайных величин.

Также рассмотрена ситуация, когда параметры λ и α неизвестны. В этом случае их можно несложно оценить, а по этим оценкам вычислить целевую функцию $\mathsf{E}\left[V(x,b)\right]$. В силу усиленного закона больших чисел, теоремы о наследовании сходимости и непрерывности целевой функции от указанных параметров, получена её сильно состоятельная оценка. Скорость сходимости такой оценки была также численно проанализирована.

Таким образом, получено обобщение результатов работ [1] и [2]

Источники и литература

1 Dassios, A. and Wu, S. (2009). On barrier strategy dividends with Parisian implementation delay for classical surplus processes. Insurance: Mathematics and Economics, 45, 195–202.

2 Булинская Е. В., Шигида Б. И. Анализ чувствительности некоторых прикладных моделей теории вероятностей // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 3. — С. 19–34.