Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятности больших уклонений для простого осциллирующего случайного блуждания

Научный руководитель – Козлов Михаил Васильевич

Ветрова Елена Леонидовна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия
E-mail: vetroel@gmail.com

Рассматривается марковская цепь (Y_n) на множестве целых точек прямой, переходные вероятности которой на подмножествах положительных и отрицательных чисел такие же, как у двух различных простых случайных блужданий. Из точки 0 переходы возможны в точки ± 1, для простоты мы положим их равновероятными. Таким образом,

$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1) = \begin{cases} p & \text{при } Y_n > 0, \\ 1/2 & \text{при } Y_n = 0, \\ \tilde{p} & \text{при } Y_n < 0. \end{cases}$$

$\mathbf{P}(Y_{n+1} = Y_n - 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1)$; обозначим $q = 1 - p$, $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$, $Y_0 = 0$. Положим

$$\mathrm{u}_{2k} = \mathbf{P}(Y_{2k} = 0),$$

$$\psi(t) = t\lambda_t - ln\theta(\lambda_t),$$

где λ_t – корень уравнения $\mu(\lambda) = t$.

Процесс (Y_n) относится к классу так называемых частично однородных марковских цепей, введенных А.А.Боровковым - это марковские цепи на прямой, переходные вероятности которых на положительной полупрямой такие же, как и к случайного блуждания общего вида. Введем обозначение X для шага этого блуждания. В работе [1] при условии Крамера на шаг блуждания:

$$\theta(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X} < \infty \text{ при } 0 < \lambda < \lambda^+ \leq \infty$$

получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений в предположении эргодичности частично однородной марковской цепи.

В настоящей работе получена асимптотика вероятностей $P(Y_n \geq tn)$ и выражение для константы $C_1(t)$, при этом рассмотрены те диапазоны изменения t, когда влияние блуждания на отрицательное полуоси сказывается лишь через постоянный множитель в асимптотике.

Теорема. Для последовательности случайных величин Y_n
(i) при $\tilde{q} > q > 1/2$ равномерно по $t \in [\alpha, \beta] \subset (p - q, 1)$;
(ii) при $q > \tilde{q} > 1/2$ равномерно по $t \in [\alpha, \beta] \subset (\tilde{\gamma}, 1)$, $\tilde{\gamma} = \sqrt{1 - (\rho/\tilde{\rho})^2}$;
выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(Y_n > tn) \sim C_0(t) C_1(t) \frac{2t}{1+t} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n\psi(t)}, n \to \infty,$$

где $C_0(t) = (\sqrt{2\pi}\sigma(\lambda(t))\lambda(t))^{-1}$, $C_1(t) = \sum\limits_{2k \leq \sqrt[3]{n}} \frac{u_{2k}}{\theta(\lambda_t)^{2k}}$, $\tilde{\rho} = 2\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}, \rho = 2\sqrt{pq}$.