Секция «Геометрия и топология»

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИЛЛИАРДА В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ СОФОКУСНЫМИ КВАДРИКАМИ, В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ.

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Пустовойтов Сергей Евгеньевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из материальной точки, двигающейся свободно в некоторый компактной плоской области и отражающейся от границы этой области по закону отражения (угол падения равен углу отражения), то есть биллиард (рис. 1). Положим фазовое пространство $M^4 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$, где (x, y) - декартовы координаты точки на биллиарде, $(\dot{x}, \dot{y})$ - вектор скорости материальной точки. Симплектическую структуру положим стандартной. В.В.Фокичевой[2] было доказано, что для любого биллиарда, ограниченного квадриками одного софокусного семейства, существуют два независимых первых интеграла. Следовательно, такие системы интегрируемы по Лиувиллю. Также ей были посчитаны инварианты Фоменко-Цишанга для каждого биллиарда.

Однако, если в центр координат добавить гуковский потенциал, отталкивающий или притягивающий точку, то такие биллиарды все равно останутся интегрируемы. Интегралы этой системы имеют следующий вид:

$$H = \frac{k(x^2 + y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \tag{1}$$

$$G = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} + \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}) \tag{2}$$

Таким образом, любой описанный выше биллиард можно анализировать с топологической точки зрения, используя язык меченых молекул. А именно, используя метод разделения переменных, строим бифуркационную диаграмму и находим области возможного движения для каждого уровня интегралов. Затем, изучая, как эти области перестраиваются одна в другую при изменении уровня G, можно сделать вывод, через какие атомы происходит бифуркации торов Лиувилля. В случае, когда биллиард не содержит фокусов, любая бифуркация торов на любом регулярном уровне гамильтониана H описывается атомом B, B_2 или C_2. Когда же хотя бы один фокус есть, на некоторых уровнях гамильтониана появляется атом A^*. После этого, по бифуркационной диаграмме строим молекулы.

Меченые молекулы (инварианты Фоменко-Цишанга), описывающие изоэнергетические слои Q^3, получаются очень разнообразные. На рис.2 приведен пример молекулы, описывающей Q^3 для биллиарда, изображенного на рис.1.

Источники и литература

1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.
2) Фокичева В.В., Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

3) Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
4) Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам //Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.

Иллюстрации

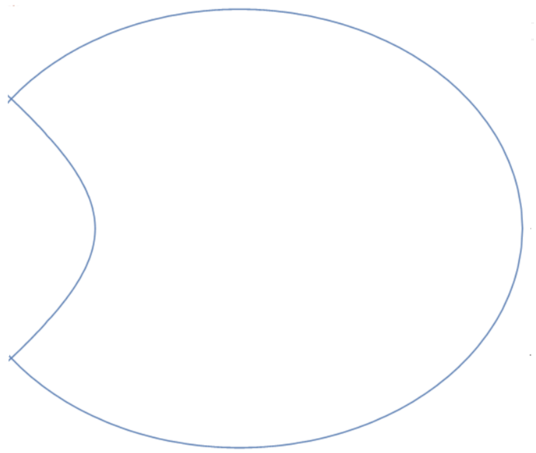

Рис. 1. Пример Биллиарда

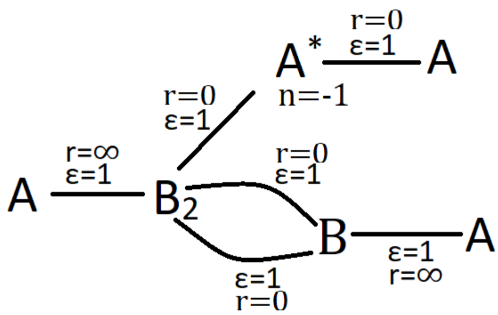

Рис. 2. Пример молекулы