Секция «Геометрия и топология»

Еще одно описание функтора Конна-Хигсона

Научный руководитель – Мануйлов Владимир Маркович

Макеев Георгий Сергеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: makeefu@ya.ru

Как известно, KK-теория Каспарова и ее вариант – E-теория Конна-Хигсона являются важным инструментом в теории C^*-алгебр и ее топологических приложениях. Обе теории были созданы для обхода проблемы недостаточного запаса гомоморфизмов. Так, KK-теория использует квазигомоморфизмы, а E-теория – асимптотические гомоморфизмы C^*-алгебр в качестве представителей. Для различных ситуаций удобно иметь разные варианты обобщений гомоморфизмов, которые можно использовать как представителей для этих теорий. В настоящей работе мы предлагаем новую конструкцию для представителей E-теории.

Пусть A, B – C^*-алгебры, A сепарабельна, B стабильна. Через $C_b(\mathbb{R}_+, B)$ будем обозначать непрерывные ограниченные функции на $\mathbb{R}_+$ со значениями в B, а через $C_0(\mathbb{R}_+, B)$ – идеал в $C_b(\mathbb{R}_+, B)$, состоящий из функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Асимптотической алгеброй над B будем называть факторалгебру $\mathfrak{A}B = C_b(\mathbb{R}_+, B)/C_0(\mathbb{R}_+, B)$. Можно показать, что $\mathfrak{A}$ – функтор. Говорят, что два $*$-гомоморфизма $\varphi_0, \varphi_1 : A \to \mathfrak{A}B$ 1-гомотопны, если существует $*$-гомоморфизм $\check{\varphi} : A \to \mathfrak{A}IB$, такой что $\varphi_j = \mathfrak{A}\mathrm{ev_j} \circ \check{\varphi},\ j = 0, 1$, где $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1$ – $*$-гомоморфизмы вычисления в точках 0 и 1 соответственно. Множество классов 1-гомотопности $*$-гомоморфизмов из A в $\mathfrak{A}B$ будем обозначать через $[[A, B]]$. Группа $E_1(A, B)$ E-теории Конна-Хигсона определяется как множество $[[SA, B]]$, снабженное естественной структурой абелевой группы.

Пусть C – C^*-алгебра. Через $\mathfrak{M}C$ обозначим C^*-подалгебру в $\mathcal{M}(C \otimes \mathbb{K})$, порожденную всеми бесконечными трехдиагональными матрицами с равномерно ограниченными по норме элементами из C.

В данной работе показано, что $\mathfrak{M}$ – эндофунктор в категории C^*-алгебр. В качестве новых представителей группы $E_1(A, B)$ будем использовать $*$-гомоморфизмы из A в $\mathfrak{M}\mathfrak{A}B$.

Определение 1. Будем говорить, что $*$-гомоморфизмы $\Phi_1, \Phi_0 : A \to \mathfrak{M}\mathfrak{A}B$ 1^*-гомотопны, если существует $*$-гомоморфизм $\check{\Phi} : A \to \mathfrak{M}\mathfrak{A}IB$, такой что $\varphi_j = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathrm{ev_j} \circ \check{\varphi},\ j = 0, 1$. Классы 1^*-гомотопности будем обозначать через $((A, B))$.

На множестве $((A, B))$ можно корректно определить операцию сложения следующим образом. Если $[\Phi], [\Psi] \in ((A, B))$, то возьмем в качестве $[\Phi] \oplus [\Psi]$ класс в $((A, B))$ $*$-гомоморфизма

$$A \to \mathfrak{M}\mathfrak{A}B : a \mapsto (\mathfrak{M}\mathfrak{A}\theta_2) \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \Phi_{i,j}(a) & 0 \\ 0 & \Psi_{i.j}(a) \end{pmatrix} \epsilon_{i,j},$$

где $\theta_2 : M_2(B) \to B$ – изоморфизм. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. $((\cdot\,,\cdot))$ *и* $E_1(\cdot\,,\cdot)$ *– естественно изоморфные бифункторы из категории* C^**-алгебр в категорию абелевых групп.*

Источники и литература

1) A. Connes and N. Higson, “Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante” *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, vol. 311, no. 2, pp. 101–106, 1990.
2) E. Guentner, N. Higson, and J. Trout, “Equivariant E-theory for C*-algebras” *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 148, 11 2000.
3) В. М. Мануйлов, “Более симметричное описание KK-бифунктора Каспарова” *Функциональный анализ и его приложения*, vol. 52, no. 3, pp. 32–41, 2018.
4) J. Cuntz, “A new look at KK-theory” *K-theory*, vol. 1, no. 1, pp. 31–51, 1987.
5) K. K. Jensen and K. Thomsen, *Elements of KK-theory. Mathematics: Theory & Applications.* 1991.
6) M. Dadarlat and T. A. Loring, “K-homology, asymptotic representations, and unsuspended E-theory” *Journal of Functional Analysis*, vol. 126, no. 2, pp. 367–383, 1994.
7) B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, vol. 5. Cambridge University Press, 1998.