Секция «Геометрия и топология»

SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Черных Георгий Сергеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: aaa057721@gmail.com

Теория SU-бордизмов определяется с помощью стабильно комплексных многообразий с фиксированной специальной унитарной структурой в стабильном касательном расслоении. В отличие от хорошо известного кольца комплексных бордизмов $\Omega^U = \mathbb{Z}[a_i, i \geq 1]$, кольцо Ω^{SU} имеет кручение и сложную мультипликативную структуру — даже по модулю кручения оно не полиномиально. Вычисление этого кольца оказалось довольно сложной задачей, которая была решена усилиями многих математиков в 1960-ых годах (Новиков, Коннер, Флойд, Уолл, Стонг).

В работе [1] Новиков ввёл в рассмотрение спектральную последовательность типа Адамса в комплексных кобордизмах (называемую с тех пор последовательностью Адамса–Новикова) и вычислил её для спектра MSU, задающего теорию SU-бордизмов. С помощью этого подхода были получены практически все результаты о структуре кольца Ω^{SU}. А именно, было получено описание кручения и образа гомоморфизма забывания $\Omega^{SU} \to \Omega^U$ в терминах некоторой естественно возникающей подгруппы $\mathcal{W} \subset \Omega^U$, которая первоначально были введена в работах Коннера–Флойда и Уолла. Эта группа не является подкольцом в Ω^U, но она может быть выделена как образ некоторого естественного проектора $\rho\colon \Omega^U \to \Omega^U$. Это позволяет определить умножение на $\mathcal{W}$ как $a * b = \rho(a \cdot b)$, где $\cdot$ — умножение в Ω^U. С помощью этого проектора определяется новая комплексно ориентируемая теория когомологий $\mathcal{W}^*(X)$ (см. Бухштабер [2]). Умножение $a * b$ обладает тем свойством, что гомоморфизм забывания $\Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ является кольцевым гомоморфизмом. Отсюда можно получить уже описание мультипликативной структуры $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$.

Интересно отметить, что исторически рассматривалось два проектора, выделяющих $\mathcal{W}$: алгебраически определяемый проектор ρ, введённый в работах Коннера и Флойда, и геометрически определяемый проектор π, использованный Стонгом. Хотя эти проекторы определяют одно и то же умножение на $\mathcal{W}$, нами было показано, что они всё-таки различны и имеют разные ядра. Изучение такого рода проекторов, определяемых ими мультипликативных структур, комплексных ориентаций теории $\mathcal{W}^*(X)$ и соответствующих формальных групп является одной из интересных тем дальнейшего исследования (см. [2]).

Интересен вопрос о нахождении геометрических представителей образующих и других важных классов SU-бордизмов. Например, можно показать, что кольцо $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$ в каждой градуировке $i > 1$ содержит элемент y_i с минимально возможным s_i-числом (согласно результату Новикова [3] эти элементы являются полиномиальными образующими кольца $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes \Omega^{SU} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_i, i > 1]$). Нахождение геометрических представителей с данными s_i-числами среди известных классов многообразий также представляет интерес. Например, компактные торические многообразия вовсе не могут быть SU-многообразиями. Квазиторические SU-многообразия представляют ноль в Ω^U в размерностях меньше 10. В работе Лю и Панова [4] были построены серии квазиторических многообразий, линейные комбинации которых дают все возможные s-числа в размерностях, начиная с 10. В работе Лимонченко, Лю и Панова [5] было доказано, что все возможные s-числа SU-многообразий получаются, если рассматривать двойственные к первому классу Чженя подмногообразия в произведениях комплексных проективных пространств и их линейные комбинации, в частности, достаточно только алгебраических многообразий Калаби-Яу (общая конструкция гиперповерхностей в торических многообразиях рассматривалась Батыревым [6] в связи с зеркальной симметрией).

Также интерес представляет нахождение конкретных геометрически-наглядных представителей, хотя бы в малых размерностях. В размерности 4, например, образующая y_2 представляется $K3$-поверхностью. В размерности 6 в качестве представителя y_3 можно взять сферу S^6 с комплексной структурой однородного пространства $G_2/SU(3)$. Мы доказываем [7], что образующие $\pm y_3, \pm y_4$ в размерностях 6 и 8 представляются многообразиями Калаби–Яу. Кроме того, образующую y_4 можно представить комплексным грассманианом $Gr(2,4)$ с нестандартной стабильно комплексной структурой.

Об этих вопросах и будет рассказано в докладе. Доклад основан на совместной статье [7] докладчика с И. Ю. Лимонченко и Т. Е. Пановым.

Источники и литература

1 Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов* Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат. **31** (1967), вып. 4, 855–951

2 Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* Успехи Мат. Наук 27 (1972), вып. 6, 231–232.

3 Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Мат. Сборник 57 (1962), вып. 4, 407–442

4 Lü, Zhi; Panov, Taras. *On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.* Algebr. Geom. Topol 16 (2016), no. 5, 2865–2893.

5 Лимонченко И. Ю., Жи Лю, Панов Т. Е. *Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы.* Труды МИАН 302 (2018), 287–295

6 Batyrev, Victor V. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535.

7 Лимонченко И. Ю., Панов Т. Е., Черных Г. С. *SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители.* Успехи Мат. Наук 74 (2019), вып. 3, принято к печати.