Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Анализ систем дифференциальных уравнений с параметром, возникающих при исследовании дифференциальных уравнений третьего порядка с квадратичной нелинейностью.

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Павлова Анна Олеговна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: atyuna94@gmail.com

<div>nbsp;</div> mythm theoremТеорема definОпределение

В работе проводится качественный анализ уравнения третьего порядка с квадратичной нелинейностью вида

$$x''' + f(x)x'' + g(x)x' + h(x) = 0, \tag{1}$$

где $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x), g(x)$ являются полиномами первой степени, а $h(x)-$ полином второй степени. Исследование устойчивости сводится к линеаризации и последующему исследованию при помощи критерия Рауса-Гурвица. Они дают возможность разбить пространство параметров системы на области, соответствующие устойчивости (неустойчивости) системы. Для анализа поведения системы вблизи границ множеств использован метод проекций, описанный в работах [?] и [?]. Данный метод позволяет определить численное значение первых ляпуновских величин. Особое внимание в работе уделено множеству параметров, при которых возникает бифуркация Андронова-Хорфа. Точкой Андронова-Хопфа коразмерности один называется особая точка (x_0, κ_0), такая что матрица линейной части векторного поля системы имеет пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{2,3} = \pm i\eta$, причем другое собственное значение $\lambda_1 \neq 0$ и первая ляпуновская величина $l_1 \neq 0$. Трансверсальной точкой Андронова-Хопфа коразмерности один называется точка Андронова-Хопфа коразмерности один, для которой комплексные собственные значения, зависящие от параметра, пересекают мнимую ось с ненулевой производной. В случае $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) на центральном многообразии и его продолжении можно найти одно семейство устойчивых (неустойчивых) периодических орбит, сужающихся к точке Андронова-Хопфа. В работе используется расчет первой ляпуновской величины для особых точек системы, приведенный в работе [?]. Рассмотрим
$H_0 = \{(a_0, a_1, b_0, b_1 0) \in \Omega : a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 b_0 = 1\ \}$,
$H_1 = \{(a_0, a_1, b_0, b_1 0) \in \Omega : a_0 - a_1 < 0,\ (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = 1\ \}$ гиперплоскости Андронова-Хопфа. Обозначим за $H_{00} = (a_0, b_0, a_1, b_1)$ подмножество в H_0 при $b_1 = 0$. и за $H_{10} = (a_0, b_0, a_1, b_1) \in H_1$ при $a_1 = 0$ подмножество гиперплоскости H_1. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *В уравнении (1) с множеством параметров из H_{00}, если*

$$a_1 = a_{11} = \frac{1}{b_0} \text{ либо } a_1 = a_{12} = \frac{2(1 + 8b_0^3)}{b_0(-3 + 8b_0^3)},$$

то первая ляпуновская величина

$$l_1(a_{0c}, b_0, a_{11}, 0) = \frac{(a_1b_0 - 1)(a_1b_0(-3 + 8b_0^3) - 2(1 + 8b_0^3))}{b_0 + 5b_0^4 + 4b_0^7}$$

в точке $M_0(0,0,0)$ *обращается в ноль. То есть*

$$l_1(a_{0c}, b_0, a_{11}, 0) = l_1(a_{0c}, b_0, a_{12}, 0) = 0.$$

Теорема 2. *В уравнении* (1) *с множеством параметров из* H_{10}*, если*

$$b_1 = b_{11} = \frac{2}{a_0} \text{ либо } b_1 = b_{12} = \frac{8 - a_0^3}{a_0},$$

то первая ляпуновская величина равная

$$l_1(a_{0c}, b_0, a_{11}, 0) = \frac{a_0^3(a_0b_1 - 2)(a_0b_1 - 8 + a_0^3)}{3(4 + 5(-a_0)^3 + (-a_0)^6)}$$

в точке $M_1(-1,0,0)$ *и обращается в ноль. То есть*

$$l_1(a_{0c}, b_0, a_{11}, 0) = l_1(a_{0c}, b_0, a_{12}, 0) = 0.$$

Источники и литература

1) Dias F.S., Mello L.F., Analysis of a quadratic system obtained from a scalar third order differential equation // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 161, pp. 1–25.
2) Kuznetsov Y. A., Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer- Verlag, New York, 2004.