Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Исследование одной математической модели в теории аэроупругости

Научный руководитель – Куликов Анатолий Николаевич

Запов Александр Сергеевич
Аспирант
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: yar.promo.zapov.a@gmail.com

В работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными

$$w_{tt} + g_1 w_t + g_2 w_{t,xxxx} + w_{xxxx} - b w_{xx} + dw + c w_x = F(w_{xx}, w_x, w_{xt}) \tag{1}$$

вместе с краевыми условиями

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), w_x(t, x + 2\pi) = w_x(t, x), \tag{2}$$

$$w_{xx}(t, x + 2\pi) = w_{xx}(t, x), w_{xxx}(t, x + 2\pi) = w_{xxx}(t, x), \tag{3}$$

где

$$F(w_{xx}, w_x, w_{xt}) = \frac{q_1}{2\pi} w_{xx} \int_0^{2\pi} (w_x)^2 dx + \frac{q_2}{2\pi} w_{xx} \int_0^{2\pi} w_{xt} w_x dx.$$

Здесь $w = w(t, x), g_1, g_2, d, q_1, q_2$ - положительные постоянные, c - неотрицательная константа. Краевая задача (1), (2), (3) записана в перенормированном виде и представляет собой математическую модель флаттера удлиненной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, а коэффициенты уравнения (1) имеют вполне конкретный физический смысл. Так, параметр c является результирующим и пропорционален скорости набегающего потока газа. Краевая задача (1), (2), (3) имеет нулевое состояние равновесие.

Лемма. Решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво, если $c < c_*$ и теряет устойчивость, если $c > c_*$. При $c = c_*$ реализуется критический случай.

Величина $c_* > 0$ и определяется, как

$$c_* = min\ c_n,\ c_n = \frac{g_1 + g_2 n^4}{n^2} \sqrt{n^4 + bn^2 + d}, n = 1, 2, 3...$$

Стоит отметить, что в случае $g_2 = 0$ данный минимум реализуется на номере n_0, который определяется как $entier(\sqrt[4]{d})$, а в случае $b > 0$ минимум реализуется на номере $n = 1$. В случае, если $c > c_*$, в частности, $c > c_k$, где c_k - представитель последовательности $c_n, n = 1, 2, 3...$ справедлива следующая теорема:

Теорема. Исходная краевая задача (1), (2), (3) имеет периодическое решение вида

$$w_k(t, x) = \eta_k exp(i\sigma_k t),$$

где

$$\eta_k^2 = \frac{k^2 c^2 - (k^4 + bk^2 + d)(g_1 + k^4 g_2)}{2\pi q_1 k^2 (g_1 + k^4 g_2)},\ \sigma_k = -\frac{kc}{g_1 + k^4 g_2},\ k = 1, 2, 3...$$

Источники и литература

1) Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости // М. Наука. 1961. С. 339

2) Куликов А.Н. Аттракторы одной нелинейной краевой задачи, встречающейся в теории аэроупругости // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. No. 3. С. 397-401