Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Критерий регулярности системы линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами

Научный руководитель – Парусникова Анастасия Владимировна

Илюхин Денис Олегович
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: dennic.96@mail.ru

В данной работе рассматриваются неавтономные системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

и линейные дифференциальные уравнения высшего порядка;

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = 0, x \in \mathbb{C} \tag{2}$$

где $A(t)$ - матрица с мероморфными коэффициентами, зависящими от t; x - вектор-функция. Они имеют вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

коэффициенты $a_i(t)$ являются мероморфными функциями.

У системы (1) есть особая точка $t = 0$. Нужно получить критерий регулярности этой особой точки. Все остальные случаи сводятся к случаю $t = 0$ заменой.

Целью настоящей работы является получить критерий регулярности особых точек систем линейных дифференциальных уравнений.

Для систем ЛУ 2-го и n-го порядков критерий таков:

Утверждение 1: *Особая точка $t = 0$ линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка (1) регулярна тогда и только тогда, когда функции $f_i = t^i a_i(t)$, $i = 1, 2$ голоморфны в нуле.*
Если $a_{12} \equiv 0$, то

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} - \frac{\dot{a}_{21}}{a_{21}},$$

$$a_2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + \frac{a_{22}\dot{a}_{21}}{a_{21}} - \dot{a}_{22}.$$

Если $a_{12} \not\equiv 0$, то

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} - \frac{\dot{a}_{12}}{a_{12}},$$

$$a_2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + \frac{a_{11}\dot{a}_{12}}{a_{12}} - \dot{a}_{11}.$$

Утверждение 2: *Особая точка $t = 0$ линейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка (1) регулярна тогда и только тогда, когда функции $f_i = t^i a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ голоморфны в нуле, где:*

$$a_j = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} h_{nr} a_{rj} \right) h_{rj}^{-1} + \sum_{r=1}^{n} \dot{h}_{nr} h_{rj}^{-1},$$

где $h_{ij}, h_{ij}^{-1}, \dot{h}_{ij}$ *элементы матриц* $H, H^{-1}, \dot{H}$ *соответственно. Строки матрицы* $H(t)$ *состоят из вектор-функции* $q_0, q_1, ..., q_{n-1}$*, которые имеют вид:*

$$q_0(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0) + ... + \alpha_{n-1}(t - t_0)^{n-1},$$

$$q_{j+1}(t) = \dot{q}_j(t) + q_j(t)A(t).$$

Коэффициент α_j *можно выбрать таким образом, чтобы детерминант матрицы* $H(t)$ *отличался от нуля.*

Источники и литература

1) Moser, J Math.Zeitschr. 72, 379-398(1960) - The Order of a Singularity in Fuchs' Theory.
2) Zoladek H. The monodromy group / Instytut matematyczny PAN. - Basel: Birkhauser Verlag, 2006.