Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О соотношениях между бэровскими классами формул

Научный руководитель – Быков Владимир Владиславович

Равчеев Андрей Валерьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: rav4eev@mail.ru

Для заданного n обозначим через $\mathcal{M}^n$ пространство линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями A (отождествляемыми с соответствующими системами), которое наделим компактно-открытой топологией.

Скажем, что функционал

$$\varphi : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R} \tag{1}$$

имеет компактный носитель (или *ограниченно зависим* [1]), если существует такое $T > 0$, что для любой пары оператор-функций $A, B \in \mathcal{M}^n$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Множество всех функционалов (1) с компактным носителем обозначим через $\mathfrak{K}^n$.

Для всякой совокупности $\mathcal{F}$ функционалов (1) и всякого счетного порядкового числа α определим множество $[\mathcal{F}]_\alpha$ по индукции: во-первых, $[\mathcal{F}]_0 \equiv \mathcal{F}$, а во-вторых, при каждом $\alpha > 0$ множество $[\mathcal{F}]_\alpha$ состоит из функций (1), представимых в виде $\varphi(\mu) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mu),\ \mu \in \mathcal{M}^n$, где $\varphi_k \in \cup_{\xi<\alpha}[\mathcal{F}]_\xi,\ k \in \mathbb{N}$. Определим теперь *бэровский класс формул* $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta}$ равенством (см. [1])

$$\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} = [[\mathfrak{C}^n]_\alpha \cap \mathfrak{K}^n]_\beta,$$

где $\mathfrak{C}^n$ — множество всех непрерывных функционалов (1). Возникает естественный вопрос об имеющихся включениях между введёнными классами. Частичный ответ на него дает

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых счетных порядковых чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ справедливы утверждения:*

1) *если $\alpha \le \gamma$ и $\beta \le \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \subset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;*
2) *если $\alpha + \beta < \gamma + \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;*
3) *если $\beta < \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$.*

Функционал на $\mathcal{M}^n$, принимающий одинаковые значения на любых *ляпуновски эквивалентных* системах [2, с. 63], будем называть *ляпуновским инвариантом.* Множество всех ляпуновских инвариантов обозначим через $\mathfrak{L}^n$.

В работе [3] показано, что класс $[\mathfrak{K}^n]_1 \cap \mathfrak{L}^n$ состоит из одних констант, а также установлено, что количество предельных переходов от (мультииндексной) последовательности непрерывных функционалов в формуле для ляпуновского инварианта, вообще говоря, нельзя уменьшить, заменив допредельные функционалы в ней функционалами с компактным носителем, но разрешив последним быть при этом разрывными, а именно, для всякого $\alpha \ge 1$ установлено включение $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \not\supset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1} \cap \mathfrak{L}^n$. Это утверждение дополняет

Теорема 2. *Для всякого* $\alpha \geq 2$ *справедливо включение* $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \cap \mathfrak{L}^n \subset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1}$