Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Исследование разрешимости системы квазилинейных уравнений, где $f_1(t,x), f_2(t,x), S_1, S_2$ – известные функции

Научный руководитель – Алексеенко Сергей Николаевич

Донцова Марина Владимировна

Кандидат наук

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т.е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - известные функции.

Задача (1), (2) определена на $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T>0\}$.

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование разрешимости задачи Коши для системы вида (1) с начальными условиями (2) в области Ω_T, где $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1], [2], [3], [4]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i=1,2, l=\overline{0,2}\},$$

$$N_f = max\{\underset{\Omega_T}{sup}\,|f_i|\,, \underset{\Omega_T}{sup}\,|\partial_x f_i|\,, i=1,2\},$$

$$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,$$

где K-положительное число.

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши (1), (2) в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0,T]$), где

$$u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x):$$

Теорема. *Пусть* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R), i = 1,2,\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ \ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, $K = C_\varphi + TN_f$ *и выполняются условия:*

1)$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 > 0$ *на* Z_K,

2)$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0$ *на* R,

3)$\partial_x f_1 \geq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0$ *на* Ω_T.

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3) - (6).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а

Источники и литература

1) Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. №4. С. 71–82.

2) Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19. № 4. С. 23–32.

3) Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 116-130.

4) Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т.379. №1. С. 16–21.