Об аппроксимации функции вероятности как критерия в задачах оптимизации

Торишный Роман Олегович

Аспирант

Кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования Московского Авиационного Института, Москва, Россия

E-mail: arenas-26@yandex.ru

Научный руководитель — *Соболь Виталий Романович*

В прикладных задачах управления и оптимизации возникают задачи стохастического программирования, в которых вероятностный критерий видится наиболее оптимальным с точки зрения физического смысла, но не является удобным для процесса оптимизации. В связи с этим перспективным видится разработка алгоритмов аппроксимации критериальной функции. В частности, аппроксимация значений градиента критериальной функции позволит использовать методы первого порядка как простую процедуру оптимизации.

Пусть дана функция потерь $\Phi(u, X)$, зависящая от вектора управлений u и случайной переменной X с заданным распределением $f(x)$. Критерием оптимизации является вероятностный критерий, т.е. решается задача

$$P_{\varphi}(u) = P\left\{X : \Phi(u, X) \leq \varphi\right\} \to \max_{u}. \tag{1}$$

Основной идеей, лежащей в основе аппроксимации, является замена индикаторной функции (функции Хевисайда) в представлении функции вероятности

$$P\left\{X : \Phi(u, X) \leq \varphi\right\} = M\left[I\{\Phi(u, X) \leq \varphi\}\right] = M\left[\theta(\varphi - \Phi(u, X))\right] \tag{2}$$

на сигмоидальную функцию

$$\theta(\varphi - \Phi(u, X)) \approx S_{\theta^*}(\varphi - \Phi(u, X)) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^*(\varphi - \Phi(u, X))}}, \tag{3}$$

где θ^* - большое положительное число. Сигмоидальная функция по сравнению с функцией Хевисайда непрерывна и имеет легконаходимые производные.

В ходе исследования была доказана

Теорема 1. *Пусть $\Phi(u, X)$ - непрерывная по каждому из аргументов и строго кусочно-монотонная относительно X как своего ар-*

гумента функция, а распределение величины X абсолютно непрерывно. Тогда последовательность сигмоидальных функций сходится почти наверное к функции Хэвисайда:

$$S_{\theta^*}(\varphi - \Phi(u, X)) \to \theta(\varphi - \Phi(u, X)) \text{ п.н.} \tag{4}$$

Для вычисления погрешности аппроксимации вероятностного критерия используется интегральное представление математического ожидания (2). С помощью известных соотношений теории вероятности и мажорирования подынтегральных выражений было получено выражение для оценки погрешности аппроксимации сверху:

$$\epsilon^* = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) I\{\Phi(u, X) \le \varphi\} dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) S_{\theta^*}(\varphi - \Phi(u, X)) dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\chi_2^-} f(x) \frac{1}{1 + e^{\theta^*}} dx + \int\limits_{\chi_2^+} f(x) \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta^*}}\right) dx + I_1 + I_2, \tag{5}$$

где

$$\chi_2^- = \{x |\ \varphi - \Phi(u, X) \le -1\},\ \chi_2^+ = \{x |\ \varphi - \Phi(u, X) \ge 1\}, \tag{6}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{0 \le \alpha \le \gamma^{-1}} f(x) dx + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\gamma}}\right) \cdot \int\limits_{\gamma^{-1} \le \alpha \le 1} f(x) dx, \tag{7}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-\gamma^{-1} \le \alpha \le 0} f(x) dx + \frac{1}{1 + e^{\gamma}} \cdot \int\limits_{-1 \le \alpha \le -\gamma^{-1}} f(x) dx, \tag{8}$$

$$\alpha = \varphi - \Phi(u, X),\ \gamma = \sqrt{\theta^*}. \tag{9}$$

Непосредственно из оценки погрешности сверху следует, что

$$\epsilon^* \to 0 \text{ при } \theta^* \to +\infty. \tag{10}$$

Данный факт позволяет утверждать о сходимости значений приближенной функции вероятности к значениям исходной функции вероятности, что было экспериментально подтверждено при помощи оценки значений функции методом Монте-Карло для некоторых частных случаев.