

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ

Беляев Александр Владимирович

Студент

Институт естественных наук и математики, УрФУ имени первого

Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

E-mail: belyaev.alexander1337@yandex.ru

Научный руководитель — Рязанова Татьяна Владимировна

В данной работе рассматривается стохастический вариант модели Лотки-Вольтерры с дискретным временем [1], задаваемая следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - bx_n y_n + \varepsilon \xi_n \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n + \varepsilon \xi_n, \end{cases} \quad (1)$$

где x — плотность популяции жертв, y — плотность популяции хищников, $\alpha > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $d > 0$ — параметры системы, ε — интенсивность шума, а ξ_n — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $(0, 1)$.

Целью данного исследования является анализ возможных режимов, в первую очередь, модели при $\varepsilon = 0$ в зависимости от параметров α и d для фиксированных значений параметров $b = 1$ и $c = 0.2$. Изучаются зоны существования устойчивых равновесий и циклов, замкнутой инвариантной кривой, а также хаотических аттракторов. Описываются бифуркации удвоения периода, Неймарка-Саккера и кризиса. На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма и показатели Ляпунова из параметрической зоны бифуркации рождения замкнутой инвариантной кривой ($d = 3.3$). Показано, что в системе возможно существование только одного невырожденного аттрактора в зоне бифуркации Неймарка-Саккера, в то время как в зоне параметров, соответствующих бифуркации удвоения периода плотность популяции хищников сходится к нулевому состоянию. Изучено поведение бассейнов притяжения аттракторов.

Помимо детерминированной системы $\varepsilon = 0$ подробно изучается стохастическая $\varepsilon \neq 0$, описывающая влияние внешнего случайного воздействия. Здесь, опираясь на технику функции стохастической чувствительности [2], приводится изучение разброса случайных состояний вокруг аттракторов детерминированной системы. Изучаются вероятностные механизмы вымирания популяции под действием

шума. Математически это означает переход с нетривиального аттрактора (равновесия, цикла или замкнутой инвариантной кривой) на тривиальное равновесие. Используя технику доверительных эллипсов, находятся критерии приближения численности популяции к опасным границам.

Иллюстрации

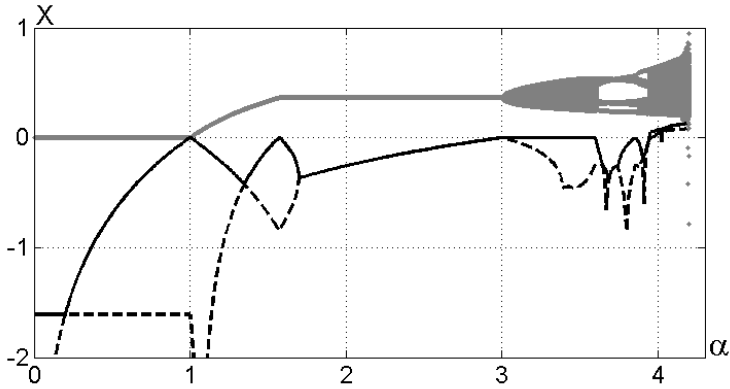


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма с показателями Ляпунова при $d = 3.3$

В заключение автор выражает благодарность доценту кафедры математической и теоретической физики Института естественных наук и математики УрФУ к.ф.-м.н. Т. В. Рязановой за кураторство в работе и за огромную помощь в проведении данного исследования.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант №16-11-10098.

Литература

1. Ming Zhao, Zuxing Xuan and Cuiping Li. Dynamics of a discrete-time predator-prey system // *Advances in Difference Equations*, 2016, Vol. 2016, № 1, P. 191.
2. Bashkirtseva I., Ryashko L., Simonova A. Analysis of stochastic effects in Kaldor-type business cycle discrete model // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, Vol. 36, P. 446–456.