Аппроксимация вещественного числа рациональным с ограниченным знаменателем

Еникеев Разиль Радикович

Аспирант

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: razil-enikeev@yandex.ru

Дробь c/d является *наилучшим приближением* для вещественного числа r, если для любой дроби a/b такой, что $0 < b \leq d$ выполняется $|r - a/b| > |r - c/d|$. Мы исследуем нахождение наилучшего приближения вещественного числа r из интервала $[0, 1]$ несократимой дробью, знаменатель которой не превосходит n и является минимальным. Цель данной работы нахождение алгоритма, который находит наилучшую аппроксимацию быстрейшим образом. Для этого мы рассматриваем как стандартные алгоритмы, так и их модификации, использующие дополнительную память для ускорения.

Для аппроксимации часто используются ряды Фарея с помощью вычисления медианты [1, 2]. Мы заметили, что наибольшее количество операций приходится на дроби вида $[1/n, \ldots, 1/(n/2)]$, вычисление которых можно произвести быстро за $O(1)$. Но данная оптимизация не является достаточно эффективной, из-за того, что такие дроби встречаются редко. Можно также улучшить алгоритм благодаря быстрому условию выхода из цикла, которое заключается в том, что если медианта a/b окажется на расстоянии от r менее чем на $1/(2 * b * n)$, мы возвращаем ее в качестве результата аппроксимации. Этот метод требует меньше итераций, но из-за более сложных вычислений при больших n начинает проигрывать исходному.

Ряд Фарея можно полностью построить заранее и он будет занимать $O(n^2)$ памяти. Он является упорядоченной последовательностью дробей, поэтому можно использовать бинарный и интерполяционный поиски [3]. Бинарный поиск использует меньше итераций по сравнению с исходным, но из-за работы с оперативной памятью, выполняется по времени практически также. Интерполяционный же поиск существенно сокращает количество итераций и время, но при этом он медленнее чем аппроксимация с помощью цепных дробей без дополнительной памяти [4] также из-за доступа к оперативной памяти.

Можно предвычислить начальные шаги исходного алгоритма, вычисляющего медианты. Для этого мы разбиваем интервал $[0, 1]$ на k равных отрезков, далее для каждого из них запускаем немного модифицированный алгоритм, вычисляющий медианты, который для каждого отрезка вернет пару дробей, которая будет включать в себя соответствующий отрезок и медианта которых будет лежать внутри этого диапазона. Во время аппроксимации мы определяем отрезок, в который попадает аппроксимируемое число, получаем пару дробей, внутри которых находится r, а затем запускаем исходный алгоритм, используя соответсвующие пары дробей в качестве начальных границ. Также мы разработали аналог этого метода для цепных дробей. Мы заранее предвычислияем границы и используем нестандартный алгоритм [4, с.23] вычисления подходящих дробей без нахождения коэффициентов для аппроксимации. В этом методе используется гораздо больше операций чем в предыдущем, поэтому он медленнее.

На основе исследования всех алгоритмов вычисления наилучшего приближения нами доказано, что наилучшим является алгоритм аппроксимации с предвычислением и нахождением медианты с параметром $k = n^2/3$ при $n < 2^{12}$, а при б*о*льших n — алгоритм, использующий цепные дроби с предвычислением и параметром $k = n$. Среди алгоритмов, не использующих дополнительную память, лучшее время показывает алгоритм, использующий цепные дроби. Данное исследование является полезным для ускорения аппроксимирующего k-арного алгоритма вычисления НОД [5].

Литература

1. Hardy G. H, Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers (Fourth Edition). Oxford: Clarendon Press: Oxford University Press, 1975.
2. Farey Approximation: `https://nrich.maths.org/6596`
3. Левитин А. В. Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. С. 240–242.
4. Хинчин А. Я. Цепные дроби - 3-е изд. М.: ГИФМЛ, 1961.
5. Ishmukhametov S.T. An Approximating k-ary GCD Algorithm // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, Volume 37, Issue 6, P. 723–729.