Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Численное исследование выпуклых регуляризаций уравнений фильтрации в условиях неустойчивости Релея-Тейлора.

Научный руководитель – Данилов Владимир Григорьевич

Илюхин Денис Олегович
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: dennic.96@mail.ru

Общепринятой в теории фильтрации является следующая схема: рассматриваются уравнения Стокса в области моделирующей пористую среду, например, модель «Частицы в ячейках» [1]. Этот уровень мы называем микроскопическим. Считая размер ячейки малым параметром, и переходя к пределу при стремлении этого параметра к нулю, получают макроскопические уравнения, описывающие крупномасштабное движение жидкости в пористой среде.

Хорошо известно, что, в предположении о недеформируемости пористого скелета и однородности несжимаемой жидкости, таким способом получают уравнения Дарси[1]. Понятно, что в реальной ситуации, например, в нефтедобыче следует рассматривать стратифицированную жидкость в поле силы тяжести.

В работе В.Г. Данилова и Г.А. Омельянова [2] исследовано развитие неустойчивости типа Релея-Тейлора в случае несмешивающихся жидкостей с малой относительной разностью плотностей. Последнее условие означает, по существу, возможность применения модели Стокса для описания этого течения. Если в начальный момент времени граница между жидкостями (для простоты будем говорить о двумерной задаче) имеет вид $y = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, где $\varphi(z)$, - 1-периодическая функция, то, как показано [2,3], при $t > 0$ граница между жидкостями будет задаваться уравнением $y = \varphi(\frac{x}{\varepsilon}, t)$, где $\varphi(z, t)$ есть 1-периодическая функция переменной z, возрастающая по абсолютной величине по t при любом z. Плотность при этом имеет вид

$$\rho = \rho_0 - H\left(y - \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right)\right)(\rho_1 - \rho_0)$$

где $\rho_i, i = 0, 1$ - плотности несмешивающихся жидкостей, $\rho_1 > \rho_0$. Слабый предел плотности при $\varepsilon \to +0$ есть непрерывная функция $\bar{\rho}$, принимающая значения $\rho_0 \le \bar{\rho} \le \rho_1$ в области $\min \varphi \le y \le \max \varphi$, что и означает появление промежуточной зоны (зоны перемешивания).

Подчеркнем, что этот эффект возникает не за счет физического перемешивания, а за счет математической операции предельного перехода.

Ясно, что в случае стратифицированной жидкости в модели Дарси промежуточная зона возникнуть не может. Следовательно, возникает задача построения новой модели фильтрации, которая переходила бы в уравнения Дарси в случае отсутствия неустойчивости и описывала бы зону перемешивания при наличии гидродинамической неустойчивости.

Следуя [4] мы рассматриваем регуляризацию задачи Маскета следующего вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle \nabla \rho, v \rangle - \varepsilon \Delta \rho - \frac{\partial}{\partial y} F(\rho) = 0; v = -\nabla p + \vec{e}\rho; \langle \nabla, v \rangle = 0$$

где $F(\rho)$ – функция, принимающая нулевое значение при $\rho = \rho_0, \rho_1, F''(\rho) > 0$.

Для этой регуляризаций показано образование зоны перемешивания («осредненной» плотности), приводятся результаты численного моделирования для различных начальных конфигураций жидкостей, рисунок 1.

Автор благодарен В.Г. Данилову за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

Источники и литература

1) Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия; Пер. с англ. В. В. Жикова; Под ред. О. А. Олейник. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
2) Danilov, V.G.; Omel'yanov, G.A. Dynamics of the interface between two immiscible liquids with nearly equal densities under gravity. European J. Appl. Math. 13 (2002), no. 5, 497-516
3) S. Antontsev, A. Meirmanov, and B. V. Yurinsky, A freeboundary problem for Stokes equations: classical solutions, Interfaces Free Bound., 2 (2000), pp. 413–424.
4) V. G. Danilov Convex regularizations of some free boundary problems, preprint №5, University of Beira Interior, Portugal, 1999, 21pp

Иллюстрации

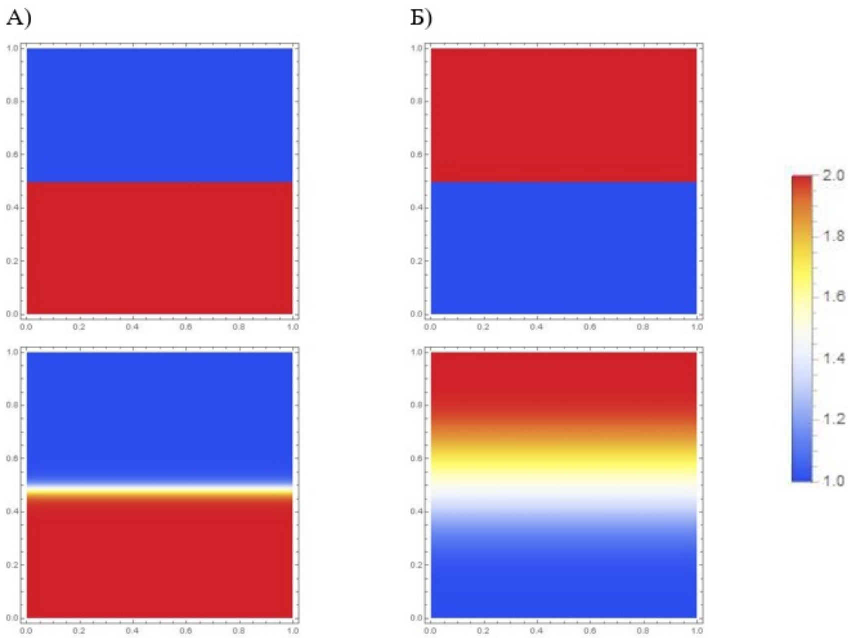

Рис. 1. «Осредненная» плотность в устойчивом (А) и неустойчивом (Б) случаях.