Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Возможные длины неассоциативных алгебр

Кудрявцев Дмитрий Константинович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kdk97@rambler.ru

Изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работы [1], где изучаются свойства длины для ассоциативных, а именно матричных, алгебр. Первые результаты для неассоциативного случая были получены не столь давно в работе [2].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру с единицей A над полем $\mathbb{F}$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — конечный набор ее элементов.

Словом длины k для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов длины не более k.

Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *порождает алгебру* A, если существует k, такое что $L_k(S)$ совпадает с A. Самое маленькое такое k называется *длиной* данной системы.

Длиной алгебры A называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих A.

Заметим, что если алгебра A ассоциативна, то из $L_k = L_{k+1}$ следует, что для всех $m > k$ выполняется $L_k = L_m$, т.е. порождаемые множества стабилизируются. Отсюда, в частности, ясно, что в ассоциативном случае для порождающей системы т.к. $dimL_1 \geq 2$, $dimL_{n-1} \geq n$ и длина A не выше $n-1$.

Утверждение. Для неассоциативной алгебры с единицей A размерности n, ее длина не превосходит 2^{n-2}. Эта оценка является точной.

Пример. Рассмотрим алгебру над $\mathbb{F}$ со следующими правилами умножения базисных элементов $e_0 = 1_{\mathbb{F}}, e_1, \dots, e_{n-1}$:
Для $1 \leq k \leq n-1$

$$e_k e_k = e_{k+1}$$

а для остальных комбинаций p, q: $1 \leq p, q \leq n-1$

$$e_p e_q = 0.$$

Множество S=$\{e_1\}$ порождает алгебру, и его длина действительно равна 2^{n-2}: e_{n-1} - слово этой длины.

Источники и литература

1) Papacena, C.J. An Upper Bound for the Length of a Finite-Dimensional Algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545
2) А. Э. Гутерман, Д. К. Кудрявцев, “Длина алгебр кватернионов и октонионов”, Численные методы и вопросы организации вычислений. XXIX, Зап. научн. сем. ПОМИ, 453, ПОМИ, СПб., 2016, 22–32