Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Оценка параметра больших уклонений для одноканальной системы массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком в случае с неизвестной функцией распределения времен обслуживания

Научный руководитель – Баштова Елена Евгеньевна

Крылова Галина Александовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: galinak108@mail.ru

Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и независимыми одинаково распределенными временами обслуживания. Для описания входящего потока потребуются следующие обозначения.

Пусть $X(t)$ - регенерирующий входящий поток. Обозначим $\theta_0 = 0$; $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ - последовательность моментов регенерации; $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 1, ...$ - период регенерации.
Пусть $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$, $i = 1, ...$ - число пришедших требований в течение i-го периода регенерации. Предполагаем, что $\mu = \mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $a = \mathbf{E}\xi_1 < \infty$. В силу свойств регенерирующего потока [2] существует интенсивность $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X(t)}{t} = \dfrac{a}{\mu}$ п.н.

Времена обслуживания $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ - н. о. р. с. в. с ф. р. $B(x)$ и средним $b < \infty$.

Введем следующие функции:

$$f(s) = \mathbf{E}b(-s)^{\xi_1} e^{-s\tau_1}, \quad b(s) = \mathbf{E}e^{-s\eta_1}, \quad s \in \mathbf{R}^+.$$

Пусть $W(t)$ - процесс виртуального времени ожидания и $W_n = W(\theta_n - 0)$.
Если $\rho = \lambda b < 1$, то существует предельное распределение процесса W_n.
Обозначим $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(W_n \leq x)$.

В работе [1] доказана теорема о больших уклонениях:

<u>Теорема 1.</u>

Пусть выполнены следующие условия:
1) наибольший общий делитель чисел $\{i = 1, 2, ...\}$, т.ч $\mathbf{P}(\xi_1 = i) > 0$, равен единице.
2) $\delta_0 = \sup\{s : f(s) < \infty\} > 0$ и $f(\delta_0) > 1$.
Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x^{-1} ln(1 - F(x)) = -q\,.$$

где q - единственный положительный корень уравнения $f(s) = 1$.

В данной работе предложена статистическая оценка параметра q при наблюдении n циклов входящего потока и времен обслуживания всех поступивших за это время требований. Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность предложенной оценки.

Обозначим η_{ij} - время обслуживания требования, пришедшего i-тым на j-том периоде регенерации и $A_j = \sum\limits_{i=1}^{\xi_j} \eta_{ij}$ - суммарная работа, поступившая в систему в течение j-ого периода регенерации.

Определим функцию $f_n(s) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} e^{s(A_j - \tau_j)}$, которая является несмещенной и состоятельной оценкой для функции $f(s)$.

Для любого целого $k = k(n) > 0$ определим $r_n = \min\left\{i : f_n\left(\frac{i}{k(n)}\right) > 1\right\}$.
Обозначим $\hat{q}_n = \dfrac{r_n}{k(n)}$ - оценка параметра q.

Теорема 2.
В условиях Теоремы 1 $\hat{q}_n$ является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой для параметра q.

Источники и литература

1) L.G.Afanasyeva, E. Bashtova, A. Tkachenko. Large deviations and statistical analysis for queueing system with regenerative input flow. 60th World Statistics Congress - ISI2015, 2015.
2) L.G.Afanasyeva, E. Bashtova. Coupling Method for Asymptotic Analysis of Queues with Regenerative Input and Unreliable Server, Queueing Systems 76 (2) (2014) 125-147.
3) N. G. Duffield, J. T. Lewis, N. O'Connell, R. Russell, and F. Toomey. Entropy of ATM traffic streams: a tool for estimating QoS parameters. IEEE Journal of Selected Areas in Communications, 13:981-990, 1995.