Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О случайном блуждании с гиперэкспоненциальным правым хвостом

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Савин Павел Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: savinwmx@gmail.com

В данной работе рассматривается предельное распределение случайного блуждания W_n с задержкой в нуле, задаваемое рекуррентным соотношением

$$W_{n+1} = (W_n + X_{n+1})^+,$$

где $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $x^+ = \max(x, 0)$.

Известно (см. например, [1, гл. III, §6]), что распределение W_n с нулевым начальным условием $W_0 = 0$ совпадает с распределением $M_n = \max(S_0, S_1, ..., S_n)$, где $S_0 = 0$ и $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Также известно, что в случае, когда $\mathbb{E}X_n < 0$, последовательность M_n (а, значит, и W_n) имеет слабый предел W_∞, который является почти наверное конечным.

Во многих приложениях W_n описывает нагрузку некоторой физической системы, и необходимо знать вероятность того, что эта нагрузка не превзойдет некоторый уровень x. Приближенной вероятностью этого события и есть предельное распределение $\mathbb{P}(W_\infty \leqslant x)$. Например, в одноканальной системе массового обслуживания $GI/GI/1$, в которой n-ый вызов происходит после $(n-1)$-го через время T_n и требует обслуживания в течение времени U_n, время ожидания W_n n-го вызова удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$W_{n+1} = (W_n + U_n - T_{n+1})^+.$$

Полагая $X_n = U_{n-1} - T_n$, приходим к случайному блужданию с задержкой в нуле.

Хорошо известна (см. [2, гл. XII, §5]) оценка, полученная Крамером: для любого $x \geqslant 0$ справедливо

$$\mathbb{P}(W_\infty > x) \leqslant e^{-\gamma x},$$

в случае, когда существует $\gamma > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{\gamma X} = 1$ (такой случай называется крамеровским). Более того, если $\mathbb{E}Xe^{\gamma X}$ конечно, то

$$\mathbb{P}(W_\infty > x) \sim ce^{-\gamma x}, \quad x \to \infty.$$

Для некоторых распределений X можно найти и явный вид предельного распределения W_∞. Например (см. [1, гл. III, §6, задача 6.4]), если X имеет отрицательное математическое ожидание и плотность на $(0; +\infty)$, равную

$$p_X(x) = p\delta e^{-\delta x},$$

непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\mathbb{P}(W_\infty \leq x) = 1 - (1 - \gamma/\delta)e^{-\gamma x}.$$

В данной работе рассматривается одноканальная система массового обслуживания, в которой интервалы между поступлениями требований T_n независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром β, а времена обслуживания U_n также независимы и имеют гиперэкспоненциальное распределение:

$$p_{U_n}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i x}, x \geqslant 0,$$

где $\delta_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Такое распределение времени обслуживания может возникать, когда имеется m различных видов требований, каждое из которых обслуживается по показательному закону, и вероятность того, что время обслуживания очередного требования имеет показательное распределение с параметром δ_i, равна α_i.

Результатом работы является явный вид предельного распределения $\mathbb{P}(W_\infty > x)$, позволяющий решать задачи оптимизации теории массового обслуживания, страхования и теории запасов, в которых встречаются случайные величины, имеющие указанные в работе распределения: находить такие характеристики описываемых процессов, как, например, предельное среднее время ожидания требования в очереди, вероятность разорения страховой компании, а также многие другие, и ставить задачу об их минимизации в некоторых условиях или ограничениях, наложенных на параметры системы.

Источники и литература

1) Asmussen, S. (2003), *Applied probability and queues.* Springer-Verlag New-York.
2) Феллер В. (1984), *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2.* 3-е изд. — М.: Мир
3) Манжиров А. В., Полянин Д. А. (2000), *Справочник по интегральным уравнениям. Методы решения.* М.: Изд-во «Факториал пресс».