Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Оптимальное управление запасами для модели с ненадежным поставщиком в случае постоянных административных издержек

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Безуглая Татьяна Викторовна
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: t.bezouglaya@gmail.com

1. Постановка задачи и её актуальность

Компания преследует цель оптимизировать издержки, возникающие у неё при управлении запасами, которые образуются в процессе заказа товара у поставщика и его последующей отгрузки потребителю.

Данный процесс разворачивается в течение $n \geqslant 1$ периодов. Заказы производятся компанией в начале каждого периода. Будучи ненадёжным, поставщик доставляет заказ немедленно с вероятностью $0 < p < 1$ и с вероятностью $q = 1 - p$ – с задержкой в один период. Требования со стороны потребителя образуют последовательность независимых одинаково распределённых неотрицательных случайных величин $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ с распределением $F_{\xi_i}(x) = \int\limits_0^x \varphi(s)ds$. В процессе управления запасами компания несёт издержки: c – стоимость заказа единицы товара; h – стоимость хранения единицы товара в течение одного периода в случае, если требование не полностью исчерпало имеющийся запас; t – штраф за недостающую единицу товара в случае образования дефицита; g – постоянные административные расходы, возникающие при заказе любой партии товаров.

Необходимо найти политику заказа товаров, минимизирующую средние дисконтированные издержки за n периодов, α – коэффициент дисконтирования будущих издержек.

В работах [2], [3], [5], [6], посвященных управлению запасами, поставщик предполагался надежным, что отличает рассматриваемую задачу от ранее изученных в литературе.

2. Вид функционального уравнения

Задача решается методом динамического программирования (метод функциональных уравнений Р. Беллмана) [1]. Пусть $f_n(x)$ – математическое ожидание общих дисконтированных издержек для n-шагового процесса при начальном запасе x и оптимальном поведении в области заказов.

Математическое ожидание понесённых компанией расходов в n-шаговом процессе при начальном запасе x составит:

$$f_n(x) = -cx + qL(x) + \min_{y\geqslant x}(gI_{y\neq x} + G_n(y)),$$

где

$$G_n(y) = G_1(y) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}(y-s)\varphi(s)ds,$$

$$G_1(y) = cy + pL(y),$$

$$L(y) = h\int_0^y (y-s)\varphi(s)ds + t\int_y^\infty (s-y)\varphi(s)ds,$$

$$f_1(x) = -cx + qL(x) + \min_{y \geqslant x}(gI_{y \neq x} + G_1(y)).$$

3. Вид оптимального поведения

Использование понятия g-выпуклой функции [4] и ее свойств позволяет установить в рассматриваемой задаче оптимальность политики типа (S, s).

Теорема 1. *В задаче с ненадежным поставщиком и постоянными административными расходами в случае, если функция $L(y)$ выпуклая, оптимальной политикой управления запасами будет являться политика типа (S, s). Такая политика будет определяться величинами $s_n < S_n$, а оптимальный уровень запасов $y_n(x)$ – следующим соотношением:*

$$y_n(x) = \begin{cases} S_n, & x < s_n \\ x, & x \geq s_n, \end{cases}$$

где
S_n – абсолютный минимум $G_n(y)$, а
s_n – единственное значение $x < S_n$, удовлетворяющее уравнению

$$G_n(s_n) = G_n(S_n) + g.$$

Источники и литература

1) Беллман Р. Динамическое программирование. Перевод с англ. И.М. Андреевой, А.А. Корбута, И.В. Романовского, И.Н. Соколовой. Под ред. Н.Н. Воробьева. М, 1960.
2) Arrow K., Karlin S., and Scarf H. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, Stanford, 1958.
3) Fischer J., and Hornstein A. (S,s) Inventory Policies in General Equilibrium. // Discussion Paper 104. Institute for Empirical Macroeconomics, September 1995.
4) Scarf H. The Optimality of (s,S) Policies in the Dynamic Inventory Problem, Proceedings of the First Stanford Symposium on Mathematics in the Social Sciences, Stanford University Press, Stanford, 1960.
5) Veinott A., and Wagner H. Computing Optimal (s,S) Inventory Policies. // Management Science, Vol. 11, No. 5, Series A, Sciences, March 1965, pp. 525-552.
6) Zheng, Y.-S., and Federgruen, A. Finding optimal policies is about as simple as evaluating a single policy. // Operations research, Vol. 39, No. 4, July-August 1991, pp. 654–665.