Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Не трансляционно инвариантная динамика бесконечной гармонической цепочки

Научный руководитель – Малышев Вадим Александрович

Меликян М.В.[1], *Лыков А.А.*[1]

1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

На прямой рассматривается бесконечная система точечных частиц единичной массы каждая

$\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, где $x_k(t)$ - траектория частицы с номером k. Взаимодействие между частицами имеет вид:

$$U(x_k, k \in \mathbb{Z}) = \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k - ka)^2 + \frac{\omega_1^2}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k - x_{k-1} - a)^2$$

где $a > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$ - некоторые параметры. Подобная модель исследовалась ранее, см. $[1-4]$, однако основным отличием от рассматриваемой в этих работах модели является рассмотрение уже бесконечного числа частиц.

Предположим, что $x_k(0) = ka,\ \dot{x}_k(0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$, и что на частицу с номером 0 действует некоторая возмущающая сила $f(t)$, то есть имеет место система уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_k(t) + \omega_0^2 (x_k(t) - ka) = \omega_1^2 (x_{k+1}(t) - 2x_k(t) + x_{k-1}(t)) + \delta_{0,k} f(t),\ k \in \mathbb{Z}$$

Обозначим отклонение частицы от положения равновесия как $q_k(t) = x_k(t) - ka$.

Теорема 1. Пусть $f = c\sin(\omega t)$, где $\omega > 0$, $\omega \neq \omega_0$, $\sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2}$. Тогда при $t \to +\infty$, k - фиксированном (константы c_1, c_2 и $c(k)$ могут быть вычислены в явном виде):

$$q_k(t) \approx c(k)\sin(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{t}} (c_1 \sin(t\omega_0 + \frac{\pi}{4}) + c_2 \sin(t\sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2} - \frac{\pi}{4}))$$

Замечание. При $\omega = \omega_0$, $\sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2}$ имеет место рост порядка $\sqrt{t}$.

Обозначим $Y_k(t) = (q_k, q_k^{'})^T$, $X_{k,n}(t) = E\{Y_k(t) Y_n^*(t)\}$, $\beta = \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2}$.

Теорема 2. Пусть $f(t) = w_t$- белый шум. Тогда при фиксированных $k, n \in \mathbb{Z}$ и $t \to +\infty$ имеем:

$$X_{k,n}(t) = C_{k,n} \ln t + O(1),\ C_{k,n} = \frac{1}{2\pi\omega_1^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0} + \frac{(-1)^{k+n}}{\beta} & 0 \\ 0 & \omega_0 + (-1)^{k+n}\beta \end{pmatrix}.$$

Источники и литература

1) Лыков А.А., Малышев В.А., Музычка С.А. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Том 57, Выпуск 4. С. 794-799

2) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. P. 721-729.

3) Lykov A.A., Malyshev V.A. Convergence to Gibbs Equilibrium - Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields 19. № 4. 2013. P. 643-666.

4) Lykov A.A., Malyshev V.A. Liouville ergodicity of linear multi-particle hamiltonian system with one marked particle velocity flips // Markov Processes and Related Fields 21, № 2, P. 381-412.