Слоение Лиувилля топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского.

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Каргинова Екатерина Евгеньевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,
Москва, Россия
E-mail: virus_kat_@mail.ru

Определение 1. *Плоскостью Минковского называется* $\mathbf{R}^2$ *со скалярным произведением:* $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.
Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E, задаваемый соотношением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. Здесь $a > b > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ - вещественные числа. Софокусное семейство квадрик C_λ задается уравнением $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$.
В. Драгович и М. Раднович в работе [3] исследовали биллиард в эллипсе на плоскости Минковского. Для описания топологии слоения Лиувилля ими был применен метод Фоменко-Цишанга. заключающийся в нахождении графа с метками, который является инвариантом интегрируемой системы и полностью определяет топологический тип его слоения Лиувилля. Данный подход подробно изложен в [1].
Определение 2. *Простым биллирадом назовем двумерное, связное, плоское, компактное многообразие с кусочно-гладким краем, состоящим из сегментов квадрик семейства* C_λ*, попарно пересекающихся под углами, не превышающими* π.
Определение 3. *Топологическим биллиардом называем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой метрикой Минковского, полученное отождествлением (склейкой) простых биллиардов вдоль некоторых выпуклых или прямолинейных сегментов.*
Данная конструкция была предложена В. В. Ведюшкиной в работе [2].
Определим отражение в топологическом биллиарде следующим образом - при попадании на границу склейки точка продолжает движение по другому листу, а при попадании в угол или ребро, не являющееся ребром склейки, точка продолжает движение так же, как и в случае плоской области.
При таком отражении сохраняется λ - каустика траектории. Имеем два первых интеграла: λ и квадрат евклидовой длины вектора скорости v_E. Поскольку эти интегралы функционально независимы и находятся в инволюции, простой и топологический биллиарды интегрируемы по Лиувиллю.
Ограничивая систему на поверхность уровня интеграла v_E, получим трехмерное многообразие, называемое изоэнергетичекой поверхностью Q^3. В зависимости от изменения λ оно расслаивается на двумерные поверхности.
В работе получена Лиувиллева классификация ряда ярких примеров топологических биллиардов, некоторые из которых представлены на рис. 1 и рис. 2. Для каждого из них вычислен инвариант Лиувиллевой эквивалентности - меченая молекула Фоменко-Цишанга, также указанная на рис. 1 и рис. 2.

Источники и литература

1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999. Т.1

2) Ведюшкина В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб., 206:10. 2015. С. 127-176

3) Драгович, В., Раднович, М. Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков на эллипсоиде // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20(2), С. 51-64

Иллюстрации

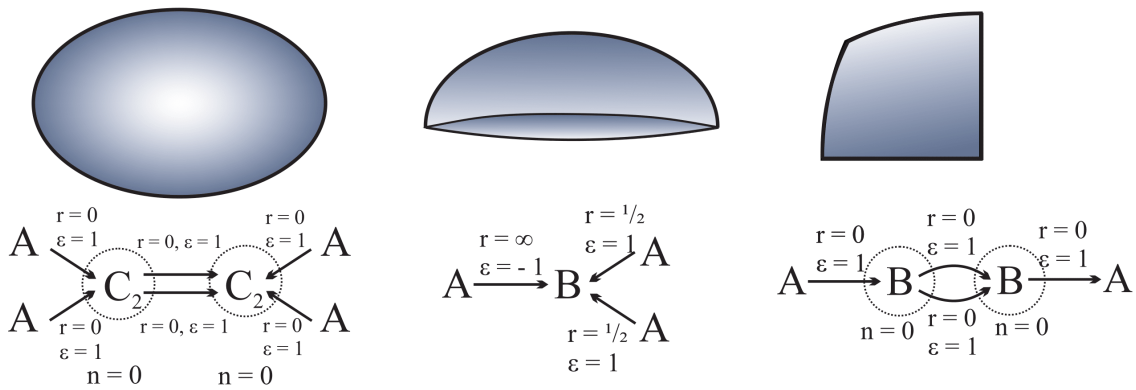

Рис. 1. Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, полученных склейкой двух эллипсов, двух половин эллипсов по выпуклой границе и двух областей, полученных пересечением двух эллипсов на плоскости Минковского и координатных осей, склееных по всем сегментам границы.

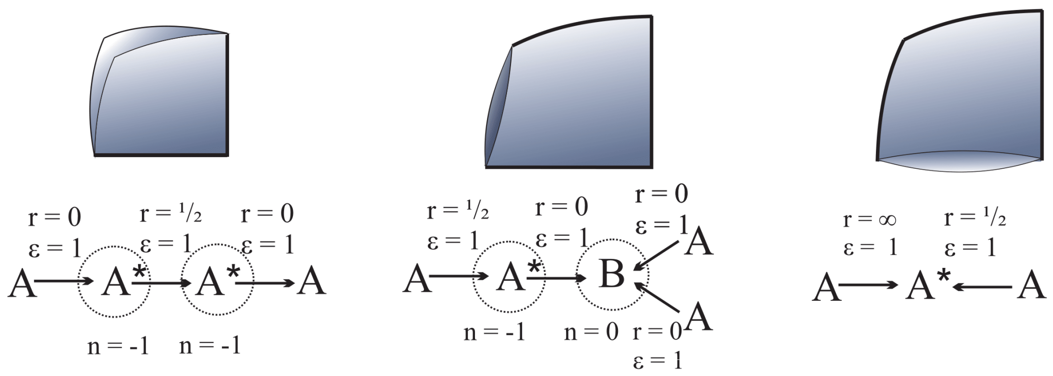

Рис. 2. Инварианты Фоменко-Цишанга ряда топологических биллиардов, являющихся склейкой двух экземпляров областей, полученных пересечением двух эллипсов на плоскости Минковского и координатных осей, склееных по различным сегментам границы.