Секция «Геометрия и топология»

Внешние биллиарды вне правильных многоугольников: множество полной меры и апериодическая точка

Научный руководитель – Канель-Белов Алексей Яковлевич

Рухович Филипп Дмитриевич
Аспирант
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
E-mail: dprpavlin@gmail.com

Для произвольной выпуклой фигуры γ, внешний биллиард T определяется следующим образом. Пусть x - точка вне γ. Существует ровно две касательные к γ, проходящие через x; выберем одну из них, например правую; пусть y - точка касания. Тогда $T(x)$ есть точка, центрально-симметричная x относительно y. Если γ - многоугольник, то множество точек вне γ можно разбить на три множества:

1) конечные точки ($T^n(x)$ не определено для некоторого $n \in \mathbb{N}$);
2) периодические точки ($T^n(x) = x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$);
3) апериодические точки (все остальные точки).

Настоящая работа связана с двумя открытыми в общем случае проблемами о внешних биллиардах вне правильных многоугольников:

1) для каких $n \geq 3$, для внешнего биллиарда вне правильного n-угольника существует апериодическая точка?
2) для каких $n \geq 3$, для внешнего биллиарда вне правильного n-угольника периодические точки вне n-угольника образуют множество полной меры?

Известно (фольклор), что в случаях $n = 3, 4, 6$ апериодических точек не существует. С. Табачникову [1] удалось показать, что в случае $n = 5$, апериодическая точка существует, однако периодические точки образуют множество полной меры. Основными результатами настоящей работы являются:

1) доказательство существования апериодической точки для случая $n = 8$;
2) описание всех возможных периодов точек для случая $n = 8$;
3) доказательство того факта, что в случае $n = 8$ периодические точки образуют вне правильного восьмиугольника множество полной меры;
4) доказательство существования апериодической точки для случая $n = 12$ (компьютерное доказательство).

Источники и литература

1) Табачников С. Внешние биллиарды // Успехи математических наук, т.48, 1993 г., вып. 6(294), 75-102.
2) J. Moser. Stable and random motions in dynamical systems, Ann. Of Math. Stud., 77, Princeton, 1973.
3) Ф.Рухович. Внешние биллиарды вне правильного восьмиугольника: периодичность почти всех орбит и существование апериодической орбиты. arXiv:1712.01130.