Секция «Геометрия и топология»

Об условиях согласованности диагональных метрик

Научный руководитель – Мохов Олег Иванович

Гагонов Александр Михайлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: gagonow@gmail.com

Рассматриваются пары *диагональных* (то есть таких, что обе метрики из пары *одновременно* диагонализуются в некоторых координатах) псевдоримановых метрик, заданных в некоторой координатной области U. Изучаются условия их согласованности и почти согласованности и взаимосвязь между этими условиями. Дадим следующие общие определения.

Определение 1. [2],[3] Две псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *почти согласованными*, если для любой их линейной комбинации

$$g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u), \tag{1}$$

рассматриваемой там, где она задает невырожденный тензор, выполнено

$$\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u). \tag{2}$$

для всех наборов индексов $i,\ j,\ k$, где $\Gamma_k^{ij}(u) = g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, а $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая соответствующей метрикой.

Определение 2. [2],[3] Две псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называют *согласованными*, если для любой их линейной комбинации (1), рассматриваемой там, где она задает невырожденный тензор, выполнено соотношение (2) и следующее соотношение:

$$R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u) \tag{3}$$

для всех наборов индексов $i,\ j,\ k,\ l$, где $R_{kl}^{ij}(u) = g^{js}(u)R_{skl}^i(u)$, а $R_{jkl}^i(u)$ – компоненты тензора кривизны, порождаемого соответствующими метриками. Если для пары метрик выполнено (3), то будем называть эти две метрики *метриками с согласованными кривизнами*. Таким образом, метрики согласованы тогда и только тогда, когда они почти согласованы и их кривизны согласованы.

При этом в определениях 1 и 2 от метрик не требуется ничего, кроме невырожденности и симметричности. В частности, не предполагается, что они диагонализуемы.

Понятие согласованности метрик было введено в [2], его введение было мотивировано гамильтоновой теорией систем гидродинамического типа [1],[4],[5]. Условия (2) и (3) для пары метрик возникают в ней из условий согласованности пуассоновых структур гидродинамического типа, которым соответствуют данные метрики [3].

В данной работе ставятся и решаются задачи получения взаимосвязей между условиями почти согласованности и условиями согласованности кривизн и получения явных условий согласованности кривизн для произвольных пар *диагональных* метрик, а также дается обзор известных результатов, относящихся к условиям согласованности и почти согласованности пар произвольных метрик.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 16-11-10260).

Источники и литература

1) Дубровин Б.А., Новиков С.П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // ДАН СССР. 1983. Т. 270, №4. С. 781–785.

2) Мохов О.И. Согласованные и почти согласованные метрики // УМН. 2000. Т. 55, вып. 4(334). С. 217–218.

3) Мохов О.И. Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35, вып 2. С. 24–36.

4) Мохов О.И., Ферапонтов Е.В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // УМН. 1990. Т. 45, вып. 3(273). С. 191–192.

5) Ферапонтов Е.В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа // Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 25, вып. 3. С. 37–49.