Секция «Геометрия и топология»

Предквантование по Сурьо-Костанту на симплектических многообразиях с контактными особенностями

Научный руководитель – Зотьев Дмитрий Борисович

Сидельников Владислав Игоревич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: vlad_sidelnikov73@mail.ru

Предквантованием симплектического многообразия (M, ω) называется линейное отображение $F \longmapsto \hat{F}$ множества $C^{\infty}(M; \mathbb{C})$ в пространство линейных операторов на некотором предгильбертовом пространстве, удовлетворяющее условиям:

1. $\hat{1} = 1$ (тождественный оператор)
2. $\widehat{\{F, G\}} = [\hat{F}, \hat{G}]$, где $[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar^{-1} \cdot (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})$ – квантовая скобка Пуассона
3. $\hat{\overline{F}} = \hat{F}^{*}$ (черта сверху – комплексное сопряжение, $*$ – сопряженный оператор).

Замкнутая 2-форма называется целочисленной, если ее интеграл по любому 2-циклу является целым числом [1]. Сурьо и Костантом была предложена конструкция предквантования, осуществимость которой эквивалентна целочисленности симплектической формы ω в единицах постоянной Планка h [2].

Пусть на многообразии M^{2n} дана замкнутая 2-форма ω, и $\dim Ker(\omega_{\rho}) = 2k > 0$ в некоторой точке ρ. Предположим, что существует такая гладкая гиперповерхность $S \subset M$, что $\rho \in S$ и $\dim \mathcal{Z}_y = 2k \ \forall y \in S$. Если $\mathcal{Z}_{\rho} \not\subset T_{\rho}S$ и $d^{2k-1}Pf(\omega)_{\rho} \neq 0$, то ρ называется контактной точкой [3].

Рассмотрим M^{2n} с замкнутой 2-формой ω, невырожденной на $M^{2n} \setminus \Theta$, где множество $\Theta \subset M^{2n}$ состоит из контактных точек. Пара (M^{2n}, ω) называется симплектическим многообразием с контактными особенностями [4]. Если $\rho \in \Theta$ и $\exists \lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} \operatorname{sgrad}(f)(y) = w$, то вектор w обозначается $\operatorname{sgrad}(f)(\rho)$. Корректная определенность поля $\operatorname{sgrad}(f)$ на всем M^{2n} эквивалентна $df(Ker(\omega_y)) = 0 \ \forall y \in \Theta$ [2].

Нас интересует случай, когда $\forall y \in \Theta \ \omega_y = 0$. Тогда $df(Ker(\omega_y)) = 0$ означает $d_y f = 0$. Предквантование по Сурьо-Костанту применяется здесь к алгебре Ли $\mathcal{F}_{\Theta}$ функций $F : M^{2n} \to \mathbb{C}$, для которых особая гиперповерхность Θ, состоящая из контактных точек, является критическим подмногообразием.

В [4] определена т.н. контактно-связная сумма $(M_1^{2n} \# M_2^{2n}, \omega)$ симплектических многообразий (M_1^{2n}, ω_1) и (M_2^{2n}, ω_2). Здесь множество контактных точек Θ является сферой $S^{2n-1} \times \{0\}$, где ручка $S^{2n-1} \times [-1; 1]$ приклеивается при образовании связной суммы $M_1^{2n} \# M_2^{2n}$. Эта конструкция применима, если $(M_1^{2n}, \omega_1) = (M_2^{2n}, \omega_2)$. Доказано, что если формы ω_1, ω_2 — целочисленные, то и ω является целочисленной. Отсюда следует:

Теорема

Если к несвязному объединению двух симплектических многообразий, на которых существует предквантование по Сурьо-Костанту, приклеить ручку $S^{2n-1} \times [-1; 1]$, *то полученное многообразие является симплектическим с контактными особенностями в точках множества* $\Theta = S^{2n-1} \times \{0\}$ *и допускает предквантование по Сурьо-Костанту с алгеброй операторов* $\{\hat{F} : F \in \mathcal{F}_{\Theta}\}$.

Источники и литература

1) А.Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – Москва: МГУ. 1988.
2) А.А. Кириллов. Геометрическое квантование // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1985. – Т. 4. – С. 141-178.
3) Д.Б. Зотьев. Контактные вырождения замкнутых 2-форм // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 4. – С. 47-78.
4) Д.Б. Зотьев. Симплектические многообразия с контактными особенностями. Дисертация на соискание ученой степени доктора физ-мат. наук. – Москва: МГУ. 2011.