Секция «Геометрия и топология»

Сходимость последовательностей в пространствах

Научный руководитель – Грызлов Анатолий Александрович

Цигвинцева Кристина Николаевна

Студент (бакалавр)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

E-mail: kristie97@ya.ru

В работе рассматриваются топологические пространства, в которых всякая последовательность является сходящейся. Под последовательностью мы понимаем последовательность без бесконечных «постоянных» подпоследовательностей. Пространства, рассмотренные в работе, предполагаются бесконечными T_1-пространствами. Самым известным примером пространства с указанными свойствами является бесконечное минимальное T_1-пространство. Однако круг таких пространств достаточно широк.

В случае хаусдорфовых пространств ситуация достаточно известна. Для того чтобы в хаусдорфовом пространстве всякая последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы это пространство являлось одноточечной компактификацией дискретного пространства.

В случае T_1-пространств ситуация несколько иная. Это объясняется тем, что у последовательности в T_1-пространстве может быть несколько пределов.

Теорема 1. Если X - счетное T_1-пространство, в котором всякая последовательность имеет предел, то в X существует точка, являющаяся пределом всякой последовательности из X.

Теорема 2. Если X - компактное T_1-пространство, в котором всякая последовательность имеет предел, то в X существует точка, являющаяся пределом всякой последовательности из X.

Однако, для несчетных некомпактных T_1-пространств ситуация другая.

Пример 1. Несчетное T_1-пространство X, в котором всякая последовательность имеет предел, но нет точки, являющейся пределом всех последовательностей из X. Таким пространством является множество всех счетных бесконечных ординалов. Типичной окрестностью ординала назовем начальный отрезок этого ординала, из которого удалено конечное множество отличных от него точек.