Секция «Геометрия и топология»

Решение моделей Изинга на решетках типа графа Кейли и доказательство "двойственной"формулы для статсуммы модели Изинга на произвольном графе.

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Секция «Геометрия и топология»

Решение моделей Изинга на решетках типа графа Кейли и доказательство "двойственной"формулы для статсуммы модели Изинга на произвольном графе.

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Решение моделей Изинга на решетках типа графа Кейли и доказательство "двойственной"формулы для статсуммы модели Изинга на произвольном графе.

Модель Изинга - одна из математических моделей статистической механики, предназначенная для описания свойств магнетика. Так Л. Ландау назвал одним из самых важных достижений теоретической физики 20-ого века точное решение Л. Онзангером двумерной квадратной модели Изинга. Несмотря на свою простоту, эта модель дает отличное качественное описание поведения магнетиков. В настоящее время обнаружены различные связи этой модели с другими областями математики и физики. Так Д. Хопфилд обнаружил глубокую связь между трехмерной моделью Изинга и нейросетями. А методы, получаемые при решении данной модели, связаны с теорией узлов, квантовыми группами и т.д.
Определим модель Изинга на произвольном графе Γ следующим образом: в каждой вершине графа зафиксируем значение 1 или -1, совокупность всех значений в вершинах назовем состоянием σ. Энергией состояния σ назовем величину $H(\sigma) = \sum E\sigma_i\sigma_j$, где суммирование ведется по значениям тех вершин, которые соединены ребром.
Статсуммой назовем следующую величины - $Z_\Gamma = \sum_\sigma e^{H(\sigma)}$, где суммирование ведется по всем возможным состояниям σ. Пусть некоторый магнетик имеет решетку расположения атомов такую, что ее можно получить из графа Γ некоторым регулярным наращиванием вершин графа Γ, тогда, каждый шаг наращивания - граф Γ_n является конечным приближением исходного магнетика. А все свойства магнетика получаются предельным переходом по Γ_n. Так необходимо получить $f(E) = \lim_{N\to\infty} Z_{\Gamma_n}/N$, где N количество

вершин в графе Γ_n, потому что точки разрыва $f'(E)$ определяют критические значения E, при котороых магнетик меняет свои свойства.
Из выше написанного следует, что важно получить компактную или более простую формулу для $Z_\Gamma = \sum_\sigma e^{H(\sigma)}$. Одним из способов получит такие формулы являются всевозможные комбинаторные соображения. Следуя этому подходу будет доказана формула: $Z_\Gamma = 2^V(chE)^L \sum_\xi (tanhE)^{k(\xi)}$, где V и L - количество вершин и ребер Γ , ξ - подгруппа (относительно поточечного умножения) функций на ребрах графа, таких, что для любой вершины графа Γ произведение значений функции на ребрах,соединяющих эту вершину с другими вершинами, равно 1, $k(\xi)$ - количество ребер, на которых функция принимает отрицательное значение.
С помощью этой формулы будет дано простое решение модели Изинга на графе Кейли и получены простые рекуррентные соотношения для большого класса моделей типа графа Кейли, которые интересны не только сами по себе, но и являются хорошим приближением других более сложных моделей.

Литература.

1. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике Пер. с англ., Москва, Изд-во Мир, 1985, 488 с.
2. Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, А. С. Мищенко,М. А. Штанько, М. И. Штогрин, Гомологические свойства димерных покрытий решеток на поверхностях, Функц. анализ и его прил., 1996, том 30, выпуск 3, 19–33.
3. McCoy B. M., Tar Tsun Wu. The Two-dimensional Ising Model. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1973.