Секция «Геометрия и топология»

Проблема Ферма-Штейнера в метрическом пространстве компактных множеств, наделенном расстоянием Хаусдорфа.

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Галстян Арсен Хачатурович
Студент (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: ares.1995@mail.ru

Проблема Ферма-Штейнера состоит в нахождении всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества A множества Y минимальна [1]. В настоящей работе проблема исследуется для метрического пространства $Y = H(X)$ компактных подмножеств метрического пространства X, наделенного расстоянием Хаусдорфа. Искомые в Y подмножества, на которых достигается минимум суммы расстояний по всем компактам из некоторого фиксированного конечного множества компактов $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (количество точек в A_i равно m_i), будем называть *компактами Штейнера*. Среди них выделяют по включению минимальные и максимальные. Множество решений проблемы Ферма-Штейнера обозначают $\Sigma(A)$. В каждом конкретном случае оно разбивается на непересекающиеся классы, каждый из которых обозначается $\Sigma_d(A)$ и соответствует своему вектору расстояний $d = (d_1, \ldots, d_n)$, где d_i — расстояние Хаусдорфа от компакта Штейнера до A_i. Настоящая работа является продолжением работы [2]. Нами обнаружены новые свойства и признаки компактов Штейнера. Более того, получено необходимое и достаточное условие минимальности компакта Штейнера.

Приведём основные результаты работы. Обозначим замкнутый шар с центром в точке a радиуса r через $B_r(a)$.

Утверждение 1. Минимальный компакт Штейнера — конечное множество, количество точек не превосходит $\Big((\sum_{i=1}^n m_i) - n + 1\Big)$.

Теорема 1. Для того, чтобы компакт Штейнера K являлся минимальным в классе $\Sigma_d(A)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) пересечение K с границей максимального компакта в классе $\Sigma_d(A)$ непусто;
2) $K \cap B_{d_i}(a^i_j) \neq \emptyset$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\forall j \in \{1, \ldots, m_i\}$ ($\{a^i_j\}$ — j-ая точка компакта A_i);
3) $\forall p \in K$ $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\exists j \in \{1, \ldots, m_i\}$ такие, что $\Big(K \setminus \{p\}\Big) \cap B_{d_i}(a^i_j) = \emptyset$.

Утверждение 2. Если в классе $\Sigma_d(A)$ имеется единственный минимальный компакт, то он полностью содержится в границе максимального компакта.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А.Тужилину, а также профессору А.О.Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Источники и литература

1) Ivanov A., Tuzhilin, A. Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems. River Edge, 2001.
2) Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // Journal of Geometry, Volume 108, Issue 2, Springer International Publishing, Switzerland, July 2017. pp. 575–590.