Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Равномерность как полугруппа

Научный руководитель – Орлов Игорь Владимирович

Друшляк Анастасия Игоревна
Аспирант
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: hactinet@mail.ru

Понятие равномерного пространства, открытое А. Вейлем, является глубоким обобщением понятия метрического пространства и широко используется в современной математике. Равномерность на множестве X определяется как множество "окружений диагонали"в X^2 : $\mathcal{U} = \{U_i \supset \Delta X^2\}$ и обладает рядом свойств, позволяющих, с одной стороны, рассмотреть в X топологию, порожденную равномерностью, а с другой стороны, по заданной любой вполне регулярной топологии в X воссоздать порождающую ее равномерность (вообще говоря, не единственную). Многие важные понятия анализа (фильтр Коши, полнота и т.д.) возможны только при наличии равномерной структуры пространства, которая позволяет сравнивать степень близости различных пар точек в X.

С алгебраической точки зрения важно, что над окружениями из $\mathcal{U}$ можно производить операцию композиции ("зацепления"):

$$U_1 \circ U_2 = \{(x, y) \in X^2 \big| \ \exists z \in X : \ (x, z) \in U_1, \ (z, y) \in U_2\},$$

обладающую хорошими свойствами. Более того, возможно выбрать базу равномерности, состоящую из симметричных окружений диагонали: $U = U^{-1}$. Такая база $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in I}$ *образует коммутативную полугруппу с единицей:*

$$U_1 \circ (U_2 \circ U_3) = (U_1 \circ U_2) \circ U_3; \ U_1 \circ U_2 = U_2 \circ U_1; \ U \circ \Delta = \Delta \circ U = U.$$

Используя это обстоятельство, мы применяем к полугруппе $\mathcal{B}$ технику вложения ее в выпуклый конус, разработанную в недавно опубликованной работе И. В. Орлова [2,3]. Для этого мы вводим в $\mathcal{B}$ понятие *точной (однозначной) делимости* следующим образом:

1) $\forall U \in \mathcal{B} \ \forall n \in \mathbb{N}$ полагаем $n * U = \overbrace{U \circ \ldots \circ U}^{n} = U^n$
2) U точно делимо, если $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists V \in \mathcal{B} : \ U = n * V$; равномерность $\mathcal{U}$ точно делима, если существует база $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$, состоящая из точно делимых окружений Δ;
3) В этом случае мы вводим "умножение"на скаляры $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ очевидным образом: $(V = \frac{m}{n} * U) \Leftrightarrow (n * V = m * U)$.
4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ мы полагаем: $\alpha * U = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}_+ \cap [0;\alpha]} (r * U)$.
5) Наконец, "$*$-умножение" распространяется на "$*$-линейные" комбинации:

$$\beta * [(\alpha_1 * U_1) \circ (\alpha_2 * U_2) \circ \ldots \circ (\alpha_n * U_n)] =$$

$$= ((\alpha_1 \beta) * U_1) \circ (\alpha_2 \beta) * U_2) \circ \ldots (\alpha_n \beta) * U_n)); \ (\alpha_k, \ \beta \in \mathbb{R}_+).$$

Построенная выше новая, более обширная, база $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ равномерности образует, как нетрудно проверить *выпуклый конус.* В этом конусе можно ввести естественный индуктивный порядок лучей, полагая

$$(U_1 \preceq U_2) \Leftrightarrow (\ \exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}:\ \ n_1 * U_1 \subset n_2 * U_2),$$

а затем рассматривать *псевдометрики, порожденные мажорантными направлениями.*

Производится сравнение данного метода с известной теоремой А. Вейля о представлении равномерного пространства в виде произведения псевометрических пространств [1].

Источники и литература

1) В. И. Богачев, О .Г. Смолянов, В. И. Соболев, Топологические векторные пространства и их приложения.Серия Математика и механика. М.-Ижевск: Издательство «РХД» 2012, 584 стр.

2) И. В. Орлов, О вложении однозначно делимой абелевой полугруппы в выпуклый конус. Матем. заметки, 102:3 (2017), 396–404; Math. Notes, 102:3 (2017), 361–368.

3) И. В. Орлов, А. И. Друшляк, Сублинейное расширение алгебраической К-теории Гротендика. МИКМО – 2017: сборник научных трудов конференции, Симферополь, 10-14 апреля 2017 г. Под ред. В.А. Лукьяненко. – Симферополь: КФУ, 2017. 3–7 с.