Секция «Геометрия и топология»

Преобразования метрик, сохраняющие типы одномерных минимальных заполнений конечных метрических пространств

Липатов Степан Юрьевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: stepa.lipatov@yandex.ru

article [utf8]inputenc [russian]babel hyperref amsmath amsfonts amsthm
plain thmТеорема[section] prop[thm]Предложение cor[thm]Следствие ass[thm]Утверждение lem[thm]Лемма
definition conj[thm]Гипотеза examp[thm]Пример prb[thm]Задача dfn[thm]Определение rk[thm]Замечание agree[thm]Соглашение constr[thm]Конструкция questВОПРОС
amsmath

1. Предварительные результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности см. в [1].

2. Основные результаты

Положим $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Пусть $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M, ρ) функция $f \circ \rho$ по-прежнему является метрикой на M, и сохраняются невырожденные звезды и типы минимальных заполнений четырёхточечных пространств. Тогда существует такое C, что $f + 2C$ линейна на $\mathbb{R}_{>0}$.

Пусть $M = \{p_1, \ldots, p_n\}$ и ρ — метрика на M. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Также через ρ обозначим вектор $(\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,n})$, составленный из ненулевых ρ_{ij}. Тогда $\rho \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Пусть N — сумма положительной диагональной матрицы $A = \mathrm{diag}(\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots, \lambda_{n-1,n})$ и матрицы B с одинаковыми строками из неотрицательных элементов, а $C(\rho)$ — скалярное произведение строки матрицы B на вектор расстояний. Матрица N вида $A + B$ в обозначениях 2 задаёт такое отображение $\rho \mapsto \rho'$, что $\rho'_{ij} = \lambda_{ij}\rho_{ij} + C(\rho)$. Матрица N вида $A + B$ в обозначениях 2 сохраняет метрики и минимальные заполнения, типы которых — невырожденные звёзды, тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица. При $n \geq 4$ линейное отображение A переводит аддитивные метрические пространства в аддитивные с тем же невырожденным типом минимального заполнения тогда и только тогда, когда A имеет вид $\rho \to \alpha\rho$. Матрица взаимнооднозначного линейного отображения, переводящего любое ультраметрическое пространство из 3 точек в ультраметрическое, имеет вид $A = R(B + \lambda E)$, где B — матрица из одинаковых строк из положительных элементов, $\lambda \in \mathbb{R}$, а R перестановка точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А.А.Тужилина и профессора А.О.Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.