

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Фактординамики и палиндромы слов Штурма

Научный руководитель – Белов Алексей Яковлевич

Решетников Иван Андреевич

Аспирант

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: mathbattler@yandex.ru

Комбинаторика слов находит свое применение в самых разных разделах математики. Например, в алгебре при изучении базисов и нормальных форм, в алгебраической топологии, в символической динамике. Ряд проблем, относящихся к комбинаторике слов находится на стыке алгебры и теории динамических систем. Многие проблемы комбинаторики слов представляют самостоятельный интерес [n1], [n2].

В этой работе изучаются последовательности Штурма и символическая динамика сдвигов окружности.

Определение. Бесконечное слово w над алфавитом A называется *подстановочным*, если оно представляется в виде $w = \phi^\infty(a)$, где $a \in A$ — буква, а ϕ — подстановка, такая, что $\phi(a) = aU$, где $U \in A^*$, непустое. Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U) , где M — окружность, U — дуга угловой меры α , (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей) — функция эволюции, x_0 — начальная точка — начало дуги α . Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w , эволюцию точки x_0 .

Палиндромы слов Штурма

Если рассматривать последовательность Штурма как символическую динамику сдвигов окружности, то она однозначно продолжается в обе стороны. В этом случае можно рассмотреть слова Штурма, являющиеся палиндромами. В работе доказана их подстановочность, а значит, и подстановочность слов Штурма с начальной точкой в середине дуги окружности, если слово с начальной точкой в конце дуги подстановочность.

Фактординамики

Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U) . Фактординамика получается отождествлением точек различающиеся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, а $m \in \mathbb{Z}$. Такая обобщённая точка будет правильным n -угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо

$$k = \left[\frac{\alpha}{1/n} \right] = [n\alpha],$$

либо на 1 больше для каждой обобщённой точки. Будем писать a , если их $k + 1$ и b иначе. Обозначим эту фактординамику через $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$. В работе доказан следующий факт. Если слово w , порождённое символической динамикой (M, R_α, x_0, U) подстановочное, то и слово w' , порождённое символической фактординамикой $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$ тоже подстановочное.

Источники и литература

- 1) M. Lothaire/ Algebraic combinatorics on words. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp
- 2) J. Berstel/ P. S., Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) / Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).