Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Бесконечно-размерные стационарные конфигурации точечных вихрей

Научный руководитель – Кудряшов Николай Алексеевич

Семенова Юлия Евгеньевна
Студент (магистр)
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Факультет экспериментальной и теоретической физики, Москва, Россия
E-mail: uesemenova@gmail.com

В работе рассматривается задача поиска и классификации статических конфигураций точечных вихрей с интенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ на плоскости. Детально рассмотрен случай, когда конфигурации содержат n точечных вихрей интенсивности Γ_1 и по одному точечному вихрю интенсивней $\Gamma_2 = a\Gamma_1$, $\Gamma_3 = b\Gamma_1$, где a, b - целые числа. Предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение, позволяющее находить статические конфигурации точечных вихрей с интенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Выводится необходимое условие существования таких конфигураций. Исследуются свойства полиномиальных решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрены конфигурации с наименьшим полиномиальным решением степени не более десяти. Конфигурации, которые можно получить друг из друга поворотом, растяжением и параллельным переносом на некоторый вектор, считаются эквивалентными. Ранее исследованы случаи, когда вихри делились на две группы: $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1$ и $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -2$.

Система уравнений для описания движения точечных вихрей постоянной интенсивности $\Gamma_\alpha (\alpha = 1, ..., M)$, расположенных в точках (x_α, y_α) на плоскости [1] имеет вид:

$$\frac{dz_\alpha^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1, \beta\neq\alpha}^{N} \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta}, \; z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \; \alpha = 1, .., M, \tag{1}$$

где $z_k(t)$ комплекснозначная функция, определяющая положение точки пересечения вихревой нити с перпендикулярной плоскостью в момент времени t. В данной работе, используя полиномиальный метод [2,3], мы выводим обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения положения стационарного равновесия рассматриваемой системы с интенсивностями Γ_1, Γ_2, Γ_3

$$(z^2 - 1)\left(\frac{d^2}{dz^2} w(z)\right) + (2(a+b)z + 2(b-a))\left(\frac{d}{dz} w(z)\right) + 2ab w(z) = 0, \tag{2}$$

описывающее стационарное равновесие системы, содержащей $n + 2$ точечных вихрей с n вихрями интенсивности Γ_1 и двумя вихрями с интенсивностями $\Gamma_2 = a\Gamma_1$, $\Gamma_3 = b\Gamma_1$ соответственно, где a, b целые числа. В (2) $w(z)$ – полином степени n. Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Если алгебраическое уравнение*

$$B_n = 2ab + 2n(a + b) + n(n - 1) = 0 \tag{3}$$

при фиксированных $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ имеет два различных решения в целых отрицательных числах, то общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) является полиномиальным.

Таким образом, мы видим, что в коэффициентах соответствующих полиномиальных решений при условии выполнения теоремы имеются непрерывные свободные параметры. Эти свободные параметры влияют на положения корней и, следовательно, положения вихрей. Используя эту теорему, мы находим новые равновесные конфигурации (конфигурации с бесконечной размерностью), что означает, что система вихрей может "перетекать" из одной в другую, и это приводит к стационарным решениям уравнения.

Источники и литература

1) Aref H. Relative equilibria of point vortices and the fundamental theorem of algebra // Proc. R. Soc. A., 467, 2011, P. 2168 – 2184.
2) O'Neil K. A. Minimal polynomial systems for point vortex equilibria // Physica D, 219, 2006, P. 69 – 79.
3) Demina M. V., Kudryashov N. A. Multi-particle dinamical systems and polynomials // Regular and Chaotic Dynamics, 2016, Vol. 21, No.3, P. 351–366.