Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Корректная разрешимость задачи Дирихле в полупространтстве для регулярных уравнений

Петросян Гегине Арамовна
Выпускник (магистр)
Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Кафедра математики и математического моделирования, Ереван, Армения
E-mail: heghine.petrosyan@rau.am

В работе рассматривается задача Дирихле в полупространстве для специальных (мультиоднородных) регулярных гипоэллиптических уравнений с нулевыми граничными условиями. Задачи такого типа появляются при изучении мультианизотропных процессов и трудность их изучения заключается в том, что соответствующий характеристический многочлен не обобщенно однородный, как для эллиптических или полуэллиптических уравнений (см. [1]), а мультиоднородный, и построение приближенного решения для таких уравнений представляет от себя трудность. Но, применяя специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины вполне правильного многогранника Ньютона (см. [2]), удается построить приближенные решения через интегральные операторы.

***

В $\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$P(D_x, D_{x_n})U = f(x, x_n), \quad x_n > 0,\ x \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i U}{\partial x_n^i}\right|_{x_n=0} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где оператор $P(D_x, D_{x_n})$ регулярный, то есть $P(\xi, \xi_n) \neq 0$, когда $|\xi + \xi_n| \neq 0$. В работе изучается разрешимость задачи (1)-(2), а именно доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ и имеет компактный носитель, то при $\chi = |\mu^0| + \frac{1}{2m} - \left(|\mu^0| + \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{p} > 1$ задача (1)-(2) имеет единственное решение U из класса $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)$, и для некоторой постоянной $C > 0$ (не зависящей от f) имеет место оценка*

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $\chi \leq 1$ и пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ с компактным носителем удовлетворяет следующим условиям ортогональности: $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x^s f(x, x_n)dx = 0$ при $|s| = 0, 1, \ldots, L-1$, где $L -$ натуральное число, определяемое из неравенств $\chi + L\mu^0_{min} > 1 > \chi + (L-1)\mu^0_{min}$, где $\mu^0_{min} = \min\limits_{i=1,\ldots,n-1} \mu^0_i$. Тогда для любой такой функции f задача (1)-(2) имеет единственное решение из класса $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)$, для которой имеет место неравенство (3).*

Источники и литература

1) Демиденко Г.В. О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журнал, т. XXIX, № 4, (1988).
2) Карапетян Г.А. Интегральное представление и теоремы вложения для n -мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности // Сиб. мат. журнал, 58, № 3, (2017), 573–590.