Секция «Теория пластичности»

Кручение толстостенной трубы из материала с изменяющимися деформационными свойствами.

Тишин Павел Владимирович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории пластичности, Москва, Россия
E-mail: domestic92@inbox.ru

Рассматривается задача о кручении толстостенной трубы из материала со свойствами, зависящими от вида напряженного состояния.
Геометрические параметры трубы после обезразмеривания: величина внутреннего радиуса равна 1, внешнего равна r*.
Уравнения связи между напряжениями и деформациями могут быть получены на основе представления для потенциала деформаций, который в случае активного нагружения имеет вид [1], [2]:

$$\Phi = 1/2(1+\zeta(\xi))(A+B\xi^2)\sigma_0,$$

где $\zeta(\xi) = (1+\kappa(\xi))(A+B\xi^2)^{-1}$, $\xi = \sigma/\sigma_0$ – параметр вида напряженного состояния, $A = \frac{2(1+\nu)}{3E}$, $B = \frac{3(1-2\nu)}{E}$. Таким образом, определяющие соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = (2/3(B-C\gamma)e_{ij} + (A-C/\gamma)\varepsilon\delta_{ij})(AB-C^2)^{-1},$$

где $\gamma = \sigma/\sigma_0$ – параметр вида деформированного состояния, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon\delta_{ij}$ – девиатор деформаций, $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ – объемная деформация. Параметр C характеризует степень нелинейности материала.
Классическая постановка задач кручения цилиндрических тел, основанная на гипотезах Сен-Венана не может быть использована для рассматриваемых материалов, вследствие взаимосвязи процессов объёмного и сдвигового деформирования [3]. Выражения для компонент тензора деформаций имеют вид [2]:

$$\varepsilon_{rr} = f'(r),\ \varepsilon_{\theta\theta} = f(r)/r,\ \varepsilon_{zz} = \beta,\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = 0,\ \varepsilon_{\theta z} = 1/2\alpha r.$$

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0.$$

Безразмерные напряжения $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}A$ Краевые условия для задачи кручения трубы имеют вид:

$$\sigma_{rr}|_{\bar{r}=1} = 0, \sigma_{rr}|_{\bar{r}=r*} = 0,$$

Значения крутящего момента и осевой силы определяются в ходе решения по формулам:

$$M = 2\pi\int_1^{r*} \bar{\sigma}_{\theta z} r^2 dr,\ F_z = 2\pi\int_1^{r*} \bar{\sigma}_{zz} r dr.$$

Чтобы определить β будем считать осевую силу равной нулю.
Для численного решения задачи используются метод стрельбы и метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага [4].
Значение параметров: $A = 1,\ B = 5,\ \alpha = 0.3$. Значения C варьируются и приведены на графиках (Рис. 1). График для компонент тензора напряжений рассчитан для C = 0.6. Максимальная глобальная погрешность решения не превышает 1e-5.

Источники и литература

1) Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29-34
2) Ломакин Е.В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 217-226
3) Ломакин Е.В. Кручение стержней с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 30-38.
4) Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2013, 636 с.

Слова благодарности

Автор благодарит Е. В. Ломакина за постановку задачи и обсуждение работы.

Иллюстрации

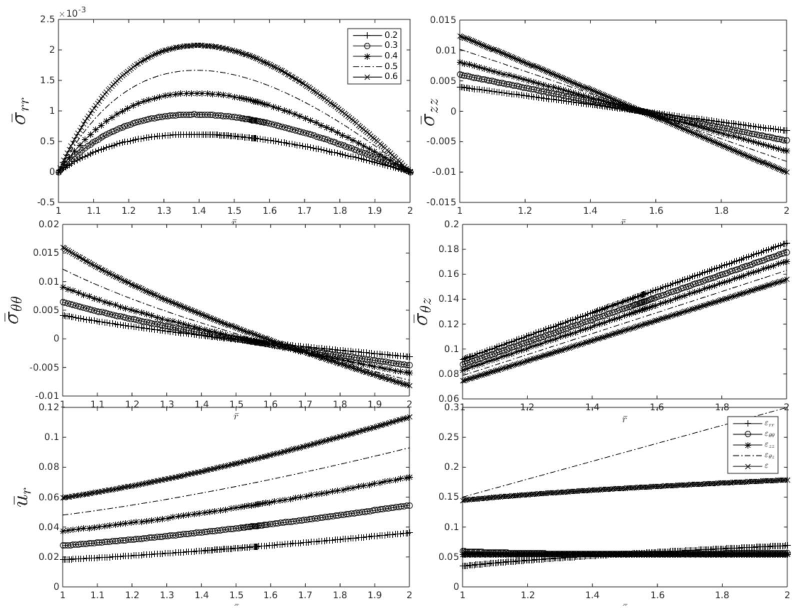

Рис. 1. Рис. 1 Численное решение