

Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Непрерывные монотонные отображения комплексных матриц, заданные групповой обратной

Ефимов Михаил Александрович

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: efmov.mikhail@gmail.com

Пусть \mathbb{C} — поле комплексных чисел, $M_n(\mathbb{C})$ — матрицы размера $n \times n$ с комплексными коэффициентами.

Определение 1. Групповая обратная матрица $A^\#$ к матрице A — это матрица, удовлетворяющая следующим соотношениям:

а) $AA^\#A = A$; б) $A^\#AA^\# = A^\#$; в) $AA^\# = A^\#A$.

В работе [1] был рассмотрен следующий частичный порядок на матрицах, заданный с помощью групповой обратной:

Определение 2. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда $A \leq^\# B$, если и только если $A = B$ или существует $A^\#$ и выполнены соотношения $AA^\# = BA^\# = A^\#B$.

Отношение $\leq^\#$ -порядка является в некотором смысле бедным, так как любая матрица индекса больше 1 максимальна. Для устранения этого недостатка Хартвигом и Митрой в работе [2] было введено отношение \leq^{cn} -порядка, расширяющее $\leq^\#$ -порядок.

Одним из возможных способов изучения свойств частичных порядков является рассмотрение отображений, монотонных относительно данных порядков, и получение их характеристик. Классические характеристические результаты касаются линейных отображений. С другой стороны, в некоторых случаях могут быть получены характеристики нелинейных отображений при выполнении дополнительных условий. Автором получен следующий результат о непрерывных отображениях:

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$, отображение $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ инъективно, непрерывно, и монотонно относительно $\leq^\#$ -порядка или \leq^{cn} -порядка. Тогда существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$T(X) = \alpha P^{-1}XP \quad \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}$$

$$T(X) = \alpha P^{-1}X^tP \quad \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}$$

$$T(X) = \alpha P^{-1}\bar{X}P \quad \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}), \text{ или}$$

$$T(X) = \alpha P^{-1}\bar{X}^tP \quad \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{C}),$$

здесь \bar{X} — матрица, полученная из X поэлементным комплексным сопряжением.

Напрямую из этой характеристики следует, что любое непрерывное инъективное монотонное отображение обязано быть аддитивным. С другой стороны, известны примеры нестандартных неаддитивных непрерывных монотонных отображений. Иными словами, условие инъективности является существенным в приведенной теореме.

Источники и литература

- 1) Mitra S. K. On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 92. — P. 17–37.
- 2) Hartwig R. E., Mitra S. K. Partial orders based on outer inverses // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 176. — P. 3–20.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постоянное внимание к работе и полезные комментарии. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-01132.